

DOI: 10.32347/2786-7269.2025.13.598-617

УДК 504.064.36

канд. техн. наук, доцент **Патракеєв І.М.**,  
ipatr@ukr.net, ORCID: 0000-0002-0448-8790,

канд. фіз.-мат. наук, доцент **Нафєєв Р.К.**,  
donrkn@gmail.com, ORCID: 0000-0003-2721-9718,

Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій,

канд. техн. наук, доцент **Зіборов В.В.**,  
ziborov@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4397-1782,

Київський національний університет будівництва і архітектури

## СИСТЕМНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ БІНАРНИХ МОДЕЛЕЙ: ЛОГІТ ТА ПРОБІТ АНАЛІЗ

*Вивчається процес прийняття рішень в умовах невизначеності, використовуючи теорію очікуваної корисності (ТОК). Основна увага приділяється аналізу впливу ймовірнісного шуму на процеси вибору альтернатив. Для моделювання невизначеності використовуються логіт та пробіт моделі, які дозволяють враховувати стохастичний характер рішень експертів та проаналізувати вплив випадкових факторів на ймовірність вибору певної альтернативи.*

*Проведено аналіз математичних основ логіт та пробіт моделей, показано їх відмінності в підході до розподілу випадкових факторів. Порівняльний аналіз моделей був проведений на прикладі вибору альтернатив "низьковуглецевого" сценарію розвитку міського середовища. Моделюючи ймовірність вибору альтернатив, було визначено домінуючу альтернативу, яка має найбільш очікувану корисність. Отримані дані дозволяють оцінювати вплив випадкових факторів на вибір експертів та регулювати параметри моделей імовірного вибору альтернатив залежно від умов рішення проблем.*

*Результати дослідження можуть бути використані для розробки експертних систем прийняття рішень, прогнозування поведінкових моделей в економіці, містобудуванні та екології.*

*Ключові слова: теорія очікуваної корисності; логіт модель; пробіт модель; невизначеність; стохастичний шум; імовірнісне моделювання; прийняття рішень; альтернативний вибір; сталий розвиток міст.*

**Постановка проблеми.** Теорія прийняття рішень має нормативне застосування: її використовують для підвищення якості ухвалених рішень. У сфері теорії управління та дослідження операцій рекомендується орієнтуватися на альтернативу з максимальною очікуваною корисністю. Проте найбільшу

цінність теорія очікуваної корисності (ТОК) має під час моделювання поведінки особи, яка приймає рішення (ОПР), особливо в умовах невизначеності.

Очікувану корисність слід розуміти як міру переваги одного результату над іншим на основі переконань і вподобань ОПР. Використання теорії ймовірностей створює формальну основу для оцінки рівня невизначеності та ухвалення раціональних рішень у ситуаціях ризику.

ТОК виникла як розвиток теорії ігор і на сьогодні є основою ухвалення рішень у різних сферах людської діяльності, особливо в умовах невизначеності. Вона широко застосовується для аналізу альтернатив управлінських рішень, де ОПР відіграє центральну роль, але змушена ухвалювати рішення за недостатньої визначеності. ТОК стає особливо корисною у випадках, коли немає однозначного лідера з максимальною корисністю. У такій ситуації теорія дозволяє оцінити ймовірності реалізації кожної альтернативи та визначити їхню очікувану корисність.

Важливим аспектом моделювання процесу ухвалення рішень є врахування ймовірного шуму. У загальному випадку кожна альтернатива має набір характеристик, що визначають її ефективність. У програмах муніципального розвитку, спрямованих на забезпечення сталого розвитку міського середовища (МС), такі характеристики можуть відображати показники функцій корисності, які дозволяють оцінювати різні сценарії розвитку.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Теорія очікуваної корисності (ТОК) є основою для багатьох моделей прийняття рішень в різних сферах, включаючи медицину, інженерію, психологію та в багатьох інших. Література з цієї теми охоплює широкий спектр досліджень, від аксіоматичних формулювань ТОК, таких авторів як фон Нейман і Моргенштерн [15], Севідж [19], Анскомб та Ауманн [6], до емпіричних досліджень, які оцінюють її математичну форму та застосування [10]. Одним з ключових досліджень в медицині [7] розглядає ТОК, як норматив для прийняття рішень, тоді як в дослідженні [10] автори розглядають застосування очікуваної корисності для прийняття рішень на основі даних моніторингу навколишнього середовища. В психології та соціальних дослідженнях ТОК використовується для аналізу процесу прийняття рішень, включаючи аксіоми транзитивності, незалежності та повноти [20].

Автор в дослідженні [12] висвітлює питання використання ТОК для формального моделювання рішень в умовах, коли підсумкові результати невизначено. Оскільки невизначеність є звичайним явищем при ухваленні управлінських рішень, використання ТОК має велике значення при побудові моделей інтерпретації емпіричних результатів. В дослідженні [14] розглянуто

нормативні та описові аспекти прийняття рішень. Показано, що ТОК є домінуючою нормативною теорією прийняття рішень в сучасних умовах, коли особа, яка приймає рішення (ОПР), виробляє висновок на основі різних ознак, таких як контекст, спогади та емоції. В статті [16] розглядаються історичні аспекти теорії прийняття рішень, теорії корисності, перспективи застосування ТОК, її застосуванні у реальному житті. Показано, що ТОК є важливою частиною теорій прийняття рішень, а також теорії перспектив. Відповідно до теорії перспектив та ТОК, ОПР можуть приймати рішення, ґрунтуючись на відносній важливості прогнозованих сценаріїв, альтернатив, а евристики можуть значно впливати на їх вибір.

Серед вітчизняних публікацій на тему застосування очікуваної корисності при виборі альтернатив можна назвати роботу М. Довбенка [1] та епізодичне застосування елементів теорії очікуваної корисності фон Неймана-Моргенштерна в рамках дослідження окремих економічних проблем можна додати дослідження [4, 5]. В роботі [2] автором запропоновано розповсюдження теореми про очікувану корисність на ситуації прийняття рішень з випадковими наслідками. В статті [3] розглянуто сутність невизначеності у процесі прийняття управлінських рішень та причини її виникнення.

**Мета статті.** Метою статті є підвищення обґрунтованості прийняття рішень експертами при виборі альтернатив умовах невизначеності. Для досягнення цієї статті розглянуто застосування теорії очікуваної корисності для оцінювання та порівняння потенційних довгострокових вигід та компромісів, пов'язаних з кожною з можливих альтернатив.

**Викладення основного матеріалу дослідження.** Сьогодні процеси прийняття рішень частіше моделюються з використанням теорії очікуваної корисності (ТОК). Теорія очікуваної корисності постала як доповнення до теорії ігор. ТОК має широке застосування у всіх сферах діяльності, де особа, яка приймає рішення (ОПР), виконує важливу та домінуючу роль, але має прийняти рішення в умовах невизначеності.

ТОК може бути корисною у випадку, якщо нема однозначного лідера з максимальним значенням корисності. У цьому випадку ТОК дозволяє оцінити ймовірність виникнення кожної альтернативи та їхню очікувану корисність на підставі цих ймовірностей. Таким чином, можна вибрати найбільш оптимальну альтернативу на основі комбінації ймовірності її успішної реалізації та очікуваної корисності. При моделюванні прийняття рішень важливим питанням є врахування ймовірного шуму.

Аксиоматика ТОК ґрунтується на існуванні чотирьох аксіом:

– **аксіома повноти.** Для довільних альтернатив  $A_i, A_j$  виконується умовне  $A_i > A_j, A_j > A_i$  або  $A_i = A_j$ , тобто при виборі альтернатив  $A_i$  та  $A_j$  ОПР повинен або віддати перевагу  $A_i$ , або віддати перевагу  $A_j$ , або повинно бути все одно;

– **аксіома транзитивності.** Якщо  $A_{i-1} > A_i$  &  $A_i > A_{i+1} \Rightarrow A_{i-1} > A_{i+1}$ . Тобто, якщо для ОПР альтернатива  $A_{i-1}$  здається краще ніж  $A_i$ , а  $A_i$  краще, ніж  $A_{i+1}$ , то буде обрано альтернативу  $A_{i-1}$ ;

– **аксіома незалежності.** При умові, що  $A_{i-1} > A_i$  та вірогідністю  $p \in (0,1]$  для будь-якого  $A_{i+1}$  виконується умова –  $pA_{i-1} + (1-p)A_{i+1} > pA_i + (1-p)A_{i+1}$ . Тобто, якщо для ОПР альтернатива  $A_{i-1}$  краще, ніж  $A_i$ , то ОПР віддасть перевагу заміні  $A_i$  на  $A_{i-1}$  (з тією ж вірогідністю  $p$ ), незалежно від третьої альтернативи  $A_{i+1}$ ;

– **аксіома безперервності.** При виконанні умові  $A_{i-1} > A_i > A_{i+1}$  можна подати  $A_{i+1}$  у вигляді  $pA_{i-1} + (1-p)A_{i+1}$ , де  $p \in (0,1]$ . Тобто, якщо ОПР віддає перевагу альтернативі  $A_{i-1}$  ніж альтернативі  $A_i$ , а  $A_i$  має перевагу більше ніж  $A_{i+1}$  то існує така вірогідність  $p$  що ОПР буде все одно, чи отримає альтернативу  $A_i$  гарантовано, або буде покладатись на випадок, який надає більш корисну альтернативу  $A_{i-1}$ , ніж альтернатива  $A_i$  з негарантованою ймовірністю  $p$ , або менш корисну альтернативу  $A_{i+1}$ .

Визначені аксіоми дозволяють розглядати переваги ОПР через функцію корисності, отже вибір найкращого варіанта зводиться до вибору варіанта з найвищою очікуваною корисністю [9, 8]. В контексті МС ці принципи можуть допомогти оцінити різні стратегії та проекти на основі їх очікуваної корисності для досягнення стійкого розвитку та досягнення благополуччя міст.

Процеси ухвалення рішень часто моделюються з використанням теорії очікуваної корисності. Теорія очікуваної корисності ґрунтується на припущенні, що кожній можливій альтернативі у процесі прийняття рішень відповідає значення її корисності, і що вибір кращої альтернативи відповідає найвищому значенню її корисності.

Для врахування багатьох джерел невизначеності, які можуть впливати на процес прийняття рішень, до корисностей додається випадковий шум перед прийняттям рішення. Цей випадковий компонент у вигляді шуму робить процес прийняття рішень ймовірнісним, що за певних умов ймовірність  $P_i$  вибору альтернативи  $A_i$  подано, як:

$$P_i = \frac{\exp(\beta \cdot U_i)}{z(\beta)}, \quad (1)$$

де  $P_i$  – ймовірність вибору  $i$ -ї альтернативи;

$U_i$  – значення корисності  $i$ -ї альтернативи;

$\beta$  – показник, який модулює вплив корисності  $U_i$  на ймовірність вибору  $i$ -ї альтернативи  $P_i$ ;

$Z(\beta)$  – нормалізуюча константа, яка визначається наступним чином:  
 $Z(\beta) = \sum_{i=1}^m \exp(\beta \cdot U_i)$ , де  $i = \overline{1, m}$ .

Чим менше показник  $\beta$ , тим сильніший вплив випадкового шуму на прийняття рішення, що робить такий процес більш детермінованим.

Моделювання процесу прийняття рішення полягає в визначенні функцій корисності  $U_i$  для кожної доступної альтернативи  $A_i$ . При моделюванні процесів прийняття рішень облік шуму ( $\beta$ ) має вирішальне значення. Врахування шуму вносить ймовірний характер в процеси прийняття рішень. З метою врахування такої випадкової величини (ВВ), як шум в процес прийняття рішень застосовуються регресійні моделі *пробіт* модель та *логіт* модель. Такі регресійні моделі дозволяють виконати врахування впливу значення отриманих показників корисності альтернатив на ймовірність їх вибору. *Пробіт* та *логіт* моделі є засобами включення такої вірогідної величини, як шум в моделі прийняття рішень. Ці моделі передбачають певні розподіли шуму, які описуються відповідно нормальним та логістичним законом розподілу випадкової величини.

На рис. 1 подано графіки, які характеризують відмінності між щільністю ВВ ( $\xi$ ) за а) нормальним та логістичним законами, б) розподілом випадкової величини за відповідними законами. В якості  $\xi$  в статті розглядається шум, який може враховуватись в процесі прийняття рішень.

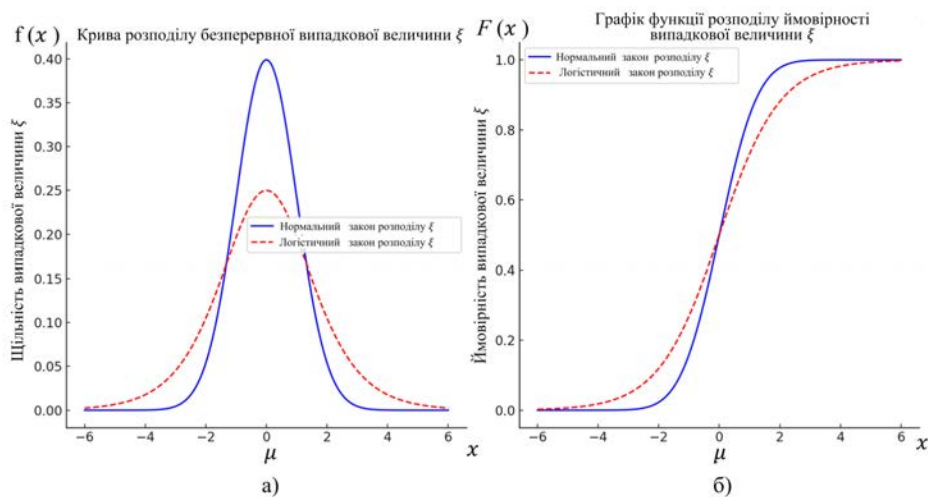


Рис. 1. Відмінності між нормальним та логістичним законами розподілу випадкової величини  $\xi$

Графіки логістичного та нормального розподілу такої випадкової величини, як шум ( $\xi$ ) мають подібності, але й мають ключові відмінності в таких елементах як форма кривих, хвостів та швидкості їх зміни. Основні відмінностями є:

– графік щільності розподілу випадкової величини  $\xi$  за нормальним законом має симетричну колоподібну форму, хвости графіка функції розподілу безперервної випадкової величини спадають експоненціально, що робить екстремальні значення маловірогідними. Під екстремальними значеннями розуміються такі значення випадкової величини  $\xi$ , які значно відрізняються від середніх значень, або з'являються тільки на краях функції розподілу;

– графік щільності розподілу ВВ ( $\xi$ ) за логістичним законом також має симетричну форму, але піки «гостріші», а хвости графіка спадають більш повільніше ніж при нормальному законі, що означає ймовірність отримання екстремальних значень вище, ніж за нормальним законом розподілу ВВ.

**Логіт модель** передбачає, що  $\xi$  має логістичний закон розподілу:

$$F(x) = \frac{e^x}{1 + e^x},$$

та однакову дисперсію  $\sigma_j^2$  для кожної альтернативи  $A_j$ .

В такому випадку ймовірність вибору  $j$ -ї альтернативи визначається формулою:

$$P_j = \frac{\exp(\beta \cdot U_j)}{\sum_{j=1}^n \exp(\beta \cdot U_j)},$$

де  $U_j$  – корисність  $j$ -ї альтернативи  $A_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ ;

$n$  – кількість альтернатив.

$\beta$  – параметр, який обернено пропорційний дисперсії випадкової величини шуму,  $\beta = 1/\sigma^2$ .

**Пробіт модель** передбачає, що ВВ шуму має нормальний закон розподілу:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

та може мати не однакову дисперсію  $\sigma_j^2$  для кожної з можливих альтернатив  $A_j$ :  
 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \dots \neq \sigma_k^2$ ,

де  $k$  – кількість альтернатив  $A_j$  ( $j = \overline{1, k}$ ).

В цьому випадку ймовірність вибору  $j$ -ї альтернативи визначається формулою:

$$P_j = \Phi \left( \frac{U_j - U_k}{\sqrt{\sigma_j^2 - \sigma_k^2}} \right),$$

де  $U_j$  та  $U_k$  – корисності відповідно  $j$ -ї та  $k$ -ї альтернативи,  $j = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $j \neq k$ ;

$\sigma_j^2, \sigma_k^2$  – дисперсії шуму відповідно  $j$ -ї та  $k$ -ї альтернативи,  $j, k = \overline{1, n}, j \neq k$ ;

$n$  – кількість альтернатив.

$\Phi$  – функція стандартного нормального розподілу випадкової величини шуму.

Логіт та пробіт моделі є фундаментальними методами дискретного вибору, дозволяючи враховувати вплив випадкових факторів та невизначеності в процесі прийняття рішень.

**Обговорення результатів дослідження.** Сьогодні актуальною для України є стратегічна мета – перехід до енергосистеми з використанням джерел енергії з низьким вмістом вуглецю, розвиток чистих джерел електрики та тепла, підвищення енергоефективності та економії енергії у всіх секторах економіки. ООН пропонує дорожню карту для стійкого зеленого відновлення та більш тісної інтеграції з країнами Європейського Союзу. За даними ООН, відновлювані джерела енергії можуть забезпечити майже 80% економіки України до 2050 року. В роботах [13, 18, 17] пропонується показник ефективності (KPI – Key Performance Indicators) на основі індикаторів речовино-енергетичних потоків МС. Показник ефективності ґрунтується на логічних правилах, які забезпечують отримання значення KPI в інтервалі від 0 до 100.

Емпіричний зміст показника полягає в тому, що KPI може використовуватися як симулятор процесу прийняття рішень групою експертів. Експерти обирають найбільш бажаний сценарій розвитку з кількох альтернатив, орієнтуючись на принципи сталого розвитку МС.

Альтернативи – це варіанти схвалюваних рішень. Альтернативи є невід’ємною частиною процесу прийняття рішень. Критерії є засіб опису характеристик варіантів рішень, відображає відмінності між альтернативами з точки зору вподобань експерта.

У таблиці 1 подано три гіпотетичні альтернативи сценарію "низьковуглецевого" розвитку МС.

Таблиця 1

Сценарій "низьковуглецевого" розвитку міського середовища	
Порядковий номер альтернативи	Зміст альтернативи
Альтернатива 1	Збільшення частки відновлювальних джерел енергії в структурі енергоспоживання міста
Альтернатива 2	Збільшення частки перероблюваних відходів в структурі міського господарства
Альтернатива 3	Комплексний розвиток "без вуглецевого" громадського та приватного транспорту

На рис. 2 подано результати досліджень [13, 17, 18], які показують зміни показника ефективності МС в залежності від:

- викидів  $CO_2$  від громадського та приватного автотранспорту, що є одним з основних джерел забруднення повітря в МС;
- частки перероблених відходів життєдіяльності населення та викидів парникових газів, вимірюваних в  $CO_2$ -еквіваленті;
- частки відновлюваної та загальної кількості спожитої енергії в енергетичній структурі міста.

Отримані поверхні можна інтерпретувати, як а) ландшафт показника ефективності МС в просторі двох змінних для відповідних альтернатив. Було побудовано карти ліній однакового рівня ефективності МС. Показано, що максимальне зростання ефективності відбувається, якщо рухатися в ортогональному напрямку відповідно контурних ліній. На основі цих карт побудовано функції корисності б) для кожної з розглянутих альтернатив.

*Оцінювання багатокритеріальних альтернатив на основі характеристик функцій корисності.* Функція корисності дозволяє визначити переваги експертів на множині допустимих альтернатив, а обчислені значення функції допомагають упорядкувати такі альтернативи за ступенем переваги для експертів. В статті використовується кардиналістичний підхід при оцінюванні корисності:

- *максимум* функції корисності: це точка на графіку, в якій функція корисності досягає свого максимального значення в просторі заданих змінних;
- *мінімум* функції корисності: це точка на графіку, в якій функція корисності досягає свого мінімального значення в просторі заданих змінних;
- *загальна корисність (total utility)* є вся корисність, яку отримує ОПР за умови зміни незалежних аргументів. Загальна корисність характеризує підсумок всіх граничних корисностей:

$$\int_a^b u(x) dx \approx h \cdot \left[ \frac{u(x_0) + u(x_n)}{2} + u(x_1) + u(x_2) + \dots + u(x_{n-1}) \right],$$

де  $h = \frac{(b-a)}{n}$  – довжина кожного кроку інтегрування;

- *середня похідна функції* характеризує швидкість зміни функції корисності.

$$\langle u'(x) \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_i} \right)}{k},$$

де  $h_i$  – крок диференціювання;

$k$  – кількість інтервалів диференціювання.

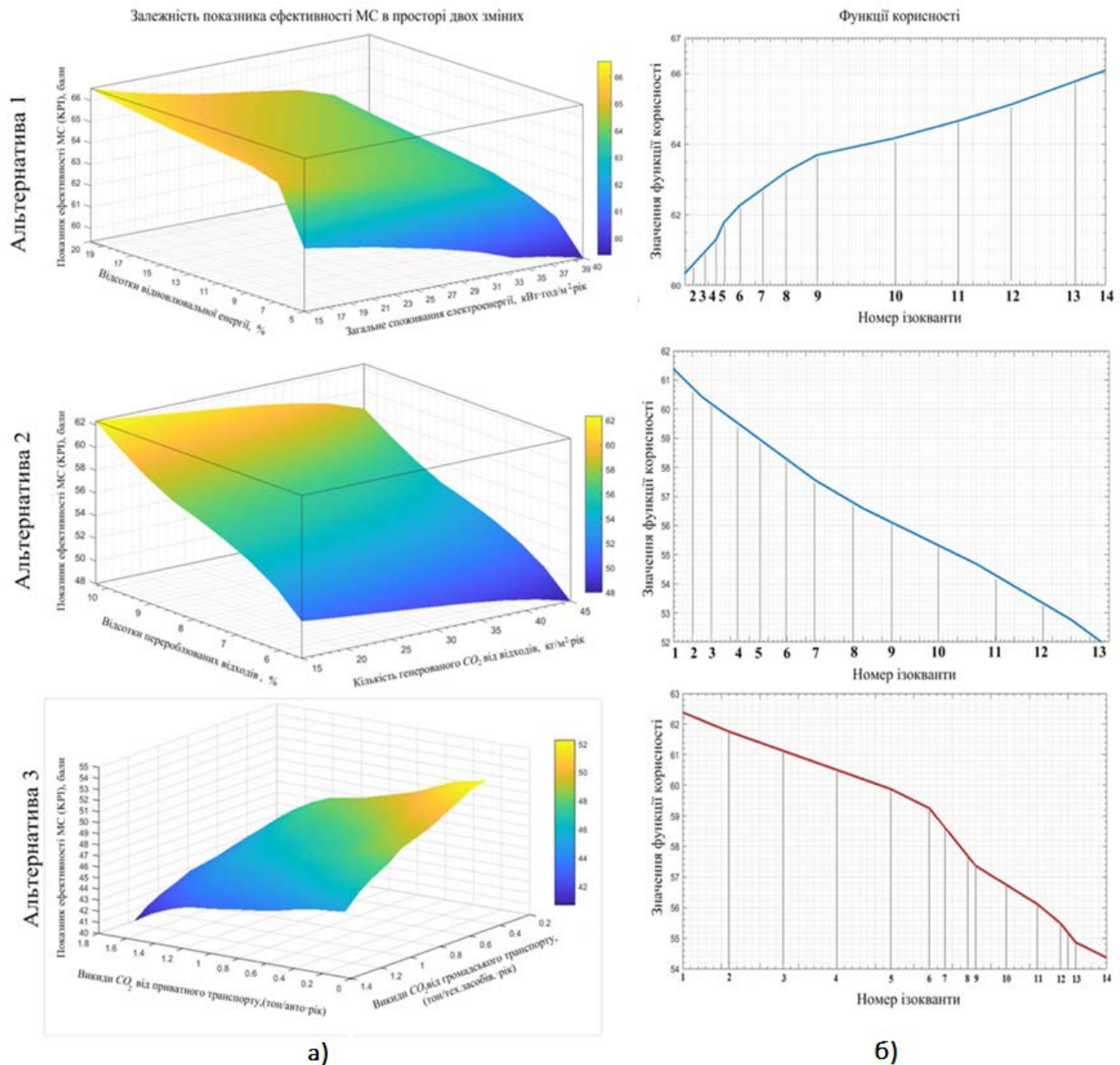


Рис. 2. Порівняльний аналіз альтернатив сценарію "низьковуглецевого" розвитку МС на основі багатфакторного моделювання

Результати обчислення характеристик функцій корисності подано в табл. 2 та, для наочності, у вигляді гістограм (рис. 3).

Таблиця 2

Обчислені характеристики функцій корисності альтернатив

Номер альтернативи	<i>Max</i> функції корисності	Повна похідна функції корисності	Загальна корисність	<i>Min</i> функції корисності
	C1	C2	C3	C4
A1	66,0844	0,2451	263,640	58,409
A2	61,3761	0,2056	206,580	48,943
A3	51,5054	0,1875	303,760	42,255

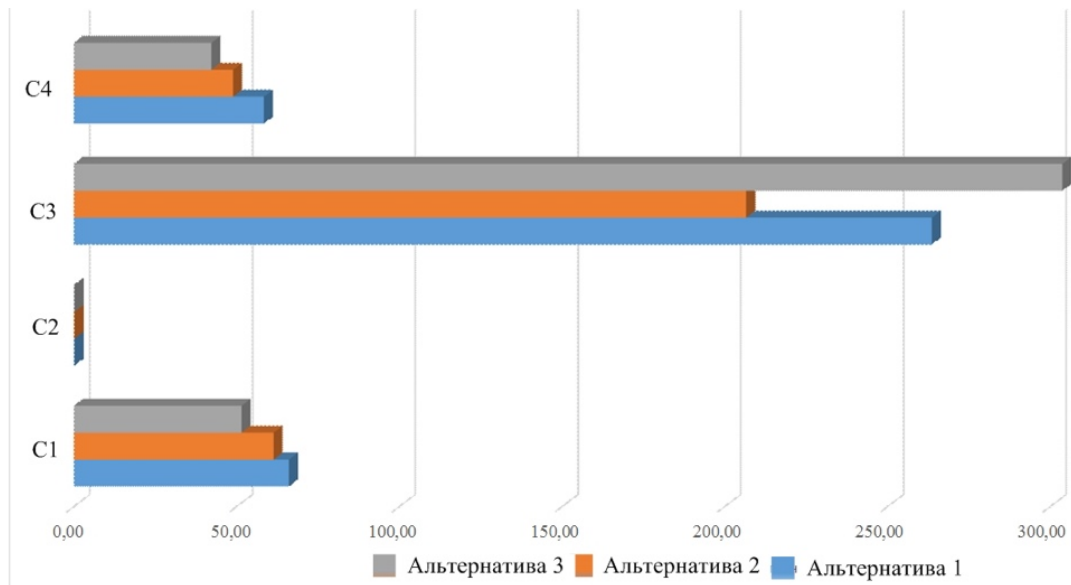


Рис. 3. Гістограми характеристик функцій корисності відповідних альтернатив

Для отримання скалярної величини функції корисності з векторах характеристик, які мають різний масштаб, застосовано метод виваженої суми з попередньою нормалізацією характеристик функцій корисності. Нижче наведено загальний двоетапний підхід.

1. Для порівняння та агрегування значень різних характеристик мало сенс, кожену характеристику (критерій) слід привести до безрозмірної форми. Одним із найпоширеніших методів нормалізації є *min-max* нормалізація, коли кожному критерію  $j$  для кожної альтернативи  $i$  обчислюються:

$$f(c_{ij}) = \frac{\max_i \{c_{ij}\} - c_{ij}}{\max_i \{c_{ij}\} - \min_i \{c_{ij}\}}, f(c_{ij}) \in [0, 1]$$

Отримані результати нормалізованих характеристик функцій корисності наведено у таблиці 3.

Таблиця 3

Нормалізовані характеристики функцій корисності

Номер альтернативи	Мак функції корисності	Повна похідна функції корисності	Загальна корисність	Мін функції корисності
	C1		C3	C4
A1	1,0000	1,0000	0,591	1,000
A2	0,6800	0,3210	0,010	0,420
A3	0,0100	0,0100	1,000	0,010

2. При визначенні вагових коефіцієнтів пріоритет надано швидкості зміни функції корисності (C2) та загальній корисності (C3), що дозволить отримати інструмент визначення не лише найвигідніших на даний момент альтернатив,

але й альтернатив де спостерігається динаміка зростання та високий потенціал для подальшого розвитку. Такий підхід підвищує якість прийняття рішень, особливо в умовах, які швидко змінюються. Це сприяє прийняттю рішень, здатних забезпечити стійкий розвиток МС в довгостроковій перспективі.

Скалярне значення функції корисності для кожної альтернативи з урахуванням вагових коефіцієнтів визначається:

$$U_i = \sum_{j=1}^m w_j \cdot f(C_{ji}),$$

де  $U_i$  – скалярна величина функції корисності для альтернативи  $A_i$ , яка відображає сукупну оцінку альтернативи;

$w_j$  – ваговий коефіцієнт критерію  $j$ ;

$f(x_{ij})$  – нормалізоване значення критерію  $j$  для альтернативи  $A_i$ ;

$m$  – загальна кількість критеріїв.

З урахуванням визначених вагових коефіцієнтів

$$W = \{w_{c1} = 0,15; w_{c2} = 0,35; w_{c3} = 0,35; w_{c4} = 0,15\}$$

отримано скалярні значення функцій корисності для кожної альтернативи. На рис. 4 показано: агреговані скалярні величини  $U_i$  кожної альтернативи, розраховані як зважені суми нормалізованих значень характеристик відповідних функцій корисності; та їхнє графічне подання у вигляді гістограм.

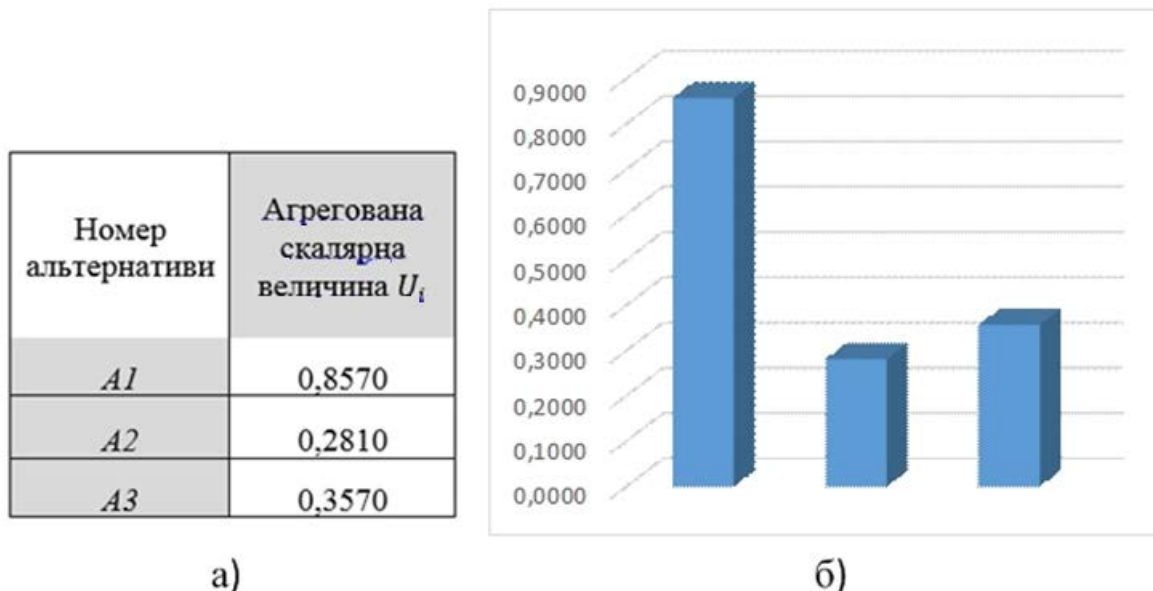


Рис. 4. Обчислені а) агреговані скалярні величини  $U_i$  кожної альтернативи та їх б) графічне подання показників функцій корисності у вигляді гістограм.

1. Нормалізація імовірностей. Обчислення суми експонент всіх альтернатив, яка застосовується у знаменнику виразу (2):

$$Z(\beta) = \sum_j^3 \exp(\beta \cdot U_j);$$

2. Обчислення імовірності вибору альтернатив. Обчислюється імовірності відповідно з виразом:

$$p_j^{logit} = \frac{\exp(\beta \cdot U_j)}{Z(\beta) = \sum_j^3 \exp(\beta \cdot U_j)}, j = \overline{1,3}. \quad (2)$$

У таблиці 4 подано результати розрахунку ймовірностей вибору альтернатив  $A1, A2, A3$  при зміні параметра чутливості  $\beta$  в діапазоні  $\beta \in [1;5]$  з кроком  $\Delta\beta = 0,2$ , відповідно до формули (1).

Таблиця 4

	A1	A2	A3
1.0	0.4611	0.2592	0.2797
1.21	0.4893	0.2436	0.2671
1.42	0.5175	0.2282	0.2543
1.63	0.5456	0.2132	0.2413
1.84	0.5733	0.1984	0.2282
2.05	0.6006	0.1841	0.2152
2.26	0.6273	0.1704	0.2023
2.47	0.6532	0.1571	0.1896
2.68	0.6783	0.1445	0.1772
2.89	0.7023	0.1326	0.1652
3.11	0.7252	0.1212	0.1535
3.32	0.747	0.1106	0.1423
3.53	0.7676	0.1007	0.1317
3.74	0.787	0.0915	0.1215
3.95	0.8052	0.0829	0.1119
4.16	0.8222	0.075	0.1028
4.37	0.838	0.0677	0.0943
4.58	0.8526	0.061	0.0864
4.79	0.8661	0.0549	0.079
5.0	0.8786	0.0493	0.0721

На рис. 5 подано графіки імовірного вибору альтернатив  $A1, A2, A3$  в умовах застосування *logit* моделі. Графік ілюструє залежність імовірності вибору альтернатив від параметру  $\beta$ .

Графік демонструє, як рівень невизначеності (шуму) впливає на ймовірність вибору альтернатив експертами та прийняття ними рішень. У випадку, якщо параметр  $\beta \approx 0$  (три лінії знаходяться на одному рівні,  $\sim 33\%$ ), то шум значно більше впливає на процеси прийняття рішень експертами. Зі збільшенням показника  $\beta$  шум значно знижується і експерти починають приймати більш певні рішення та імовірність вибору найкращої альтернативи стає домінуючою. Розуміння впливу шуму під час прийняття рішень особливо важливо під час проектування експертних систем, оскільки допомагає моделювати поведінку експертів під час прийняття рішень.

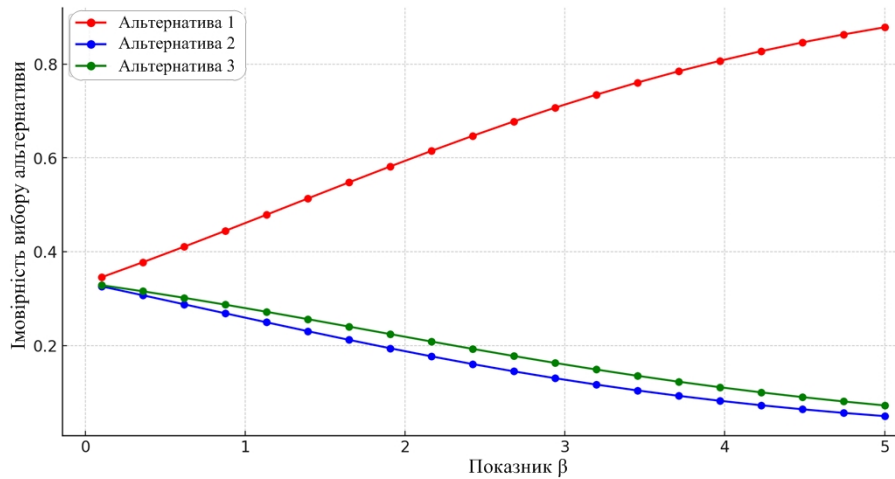


Рис. 5. Зміна ймовірності вибору альтернативи в умовах застосування логіт моделі

Моделювання ймовірності вибору альтернатив в умовах нормального розподілу шуму (Пробіт модель). Основні етапи обчислення:

1. Масштабування корисності з метою адаптації агрегованих показників корисності до нормального закону:

$$Z_j = \beta \cdot U_j,$$

де  $Z_j$  – перетворене значення  $j$ -ї корисності;

$U_j$  – вихідна корисність  $j$ -ї альтернативи;

$\beta$  – параметр чутливості до різниці корисностей.

2. Обчислення значень кумулятивної функції нормального розподілу. Для кожного показника  $Z_j$  обчислюється таким чином:

$$P_j = \Phi(Z_j), \quad (3)$$

де  $\Phi(Z_j)$  визначається через стандартний нормальний розподіл ВВ – шуму. Вираз (3) показує залежність: чим більше значення  $Z_j$ , тим вища ймовірність вибору відповідної альтернативи.

3. Нормалізація ймовірностей вибору альтернатив:

$$P_j^{norm} = \frac{\Phi(\beta \cdot U_j)}{\sum_{k=1}^3 \Phi(\beta \cdot U_k)}, j = \overline{1,3}. \quad (4)$$

Вираз (4) аналогічний до виразу визначення ймовірності вибору альтернатив щодо логіт-моделі, але використовує нормальний розподіл шуму, що робить зміну ймовірностей більш плавною.

В табл. 5 подано результати розрахунку ймовірностей вибору альтернатив  $A1, A2, A3$  при зміні параметра чутливості  $\beta$  в діапазоні  $\beta \in [1;5]$  з кроком  $\Delta\beta = 0,2$ , відповідно до формули (3).

Таблиця 5

	A1	A2	A3
1.0	0.3915	0.2972	0.3113
1.21	0.3954	0.2944	0.3102
1.42	0.397	0.2928	0.3102
1.63	0.3969	0.2922	0.3109
1.84	0.3953	0.2925	0.3122
2.05	0.3926	0.2934	0.3139
2.26	0.3892	0.2948	0.3159
2.47	0.3854	0.2966	0.3181
2.68	0.3812	0.2985	0.3202
2.89	0.3771	0.3006	0.3223
3.11	0.373	0.3027	0.3243
3.32	0.369	0.3049	0.3261
3.53	0.3653	0.3069	0.3277
3.74	0.3619	0.309	0.3291
3.95	0.3587	0.3109	0.3304
4.16	0.3559	0.3127	0.3314
4.37	0.3532	0.3145	0.3323
4.58	0.3509	0.3161	0.333
4.79	0.3488	0.3177	0.3336
5.0	0.3469	0.3191	0.334

На рис. 5 подано графіки імовірного вибору альтернатив  $A1$ ,  $A2$ ,  $A3$  в умовах застосування *Пробіт*-моделі. Графік ілюструє залежність імовірності вибору альтернатив від параметру  $\beta$ .

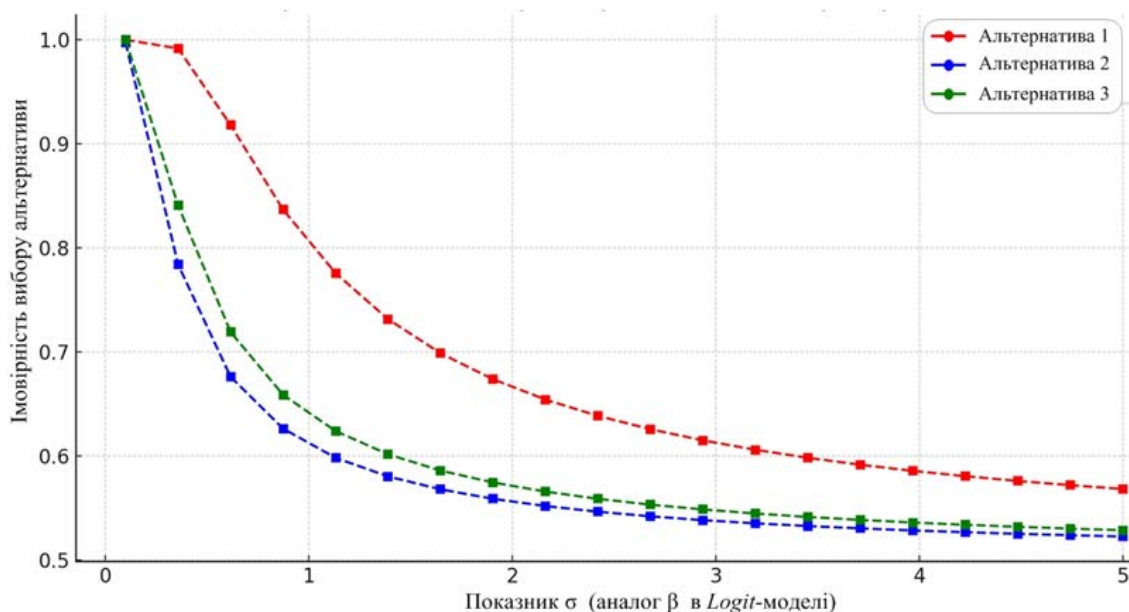


Рис. 5. Зміна імовірності вибору альтернативи в умовах застосування *Пробіт* моделі

Графік демонструє, як імовірність вибору альтернатив  $A1$ ,  $A2$ ,  $A3$  змінюється в залежності від параметра  $\sigma$ , який є аналогом  $\beta$  в *logit* моделі. При малих значеннях  $\sigma$  (шум мінімальний,  $\sigma \approx 0$ ), тобто випадковість вибору альтернатив мінімальна, то експерти завжди обирають найкращу альтернативу. Це відповідає ідеальній ситуації, коли рішення приймаються на основі чітких даних та логіки без впливу суб'єктивних факторів (невизначеність, зовнішні фактори тощо):

– альтернатива *A1* (червона крива) має найвищу ймовірність вибору (~100%);

– альтернативи *A2* та *A3* мають значно нижчі ймовірності, що означає одноставний вибір експертами альтернативи з найбільшим значенням функції корисності.

При зростанні  $\sigma$  рівень невизначеності у виборі зростає, але ймовірність вибору альтернативи *A1* має перевагу. При великих значеннях ( $\sigma \approx 5$ ) вибір стає випадковим, оскільки шум повністю "затмарює" корисність альтернатив, що означає повну невизначеність у прийманні рішень.

На рис. 6 представлено 3D-гістограма ймовірностей вибору альтернатив, отримані на основі застосування *logit* та *probit* моделей, які враховують вплив випадкових факторів (шуму) у процесі прийняття рішень. 3D-гістограма ілюструє той факт, що альтернатива *A1* має найвищу ймовірність вибору, як у *logit*, так і в *probit* моделі. Це означає, що альтернатива *A1* є найпривабливішою з точки зору очікуваної корисності, в обох моделях вона має найвищий стовпець, що підтверджує, що експерти майже одноставно обирають цю альтернативу. Альтернативи *A2*, *A3* мають нижчі ймовірності вибору, але відмінності між моделями можуть бути помітними. Побудована гістограма 3D-гістограма підтверджує ефективність теорії очікуваної корисності – експерти обирають альтернативи з найвищою очікуваною корисністю.

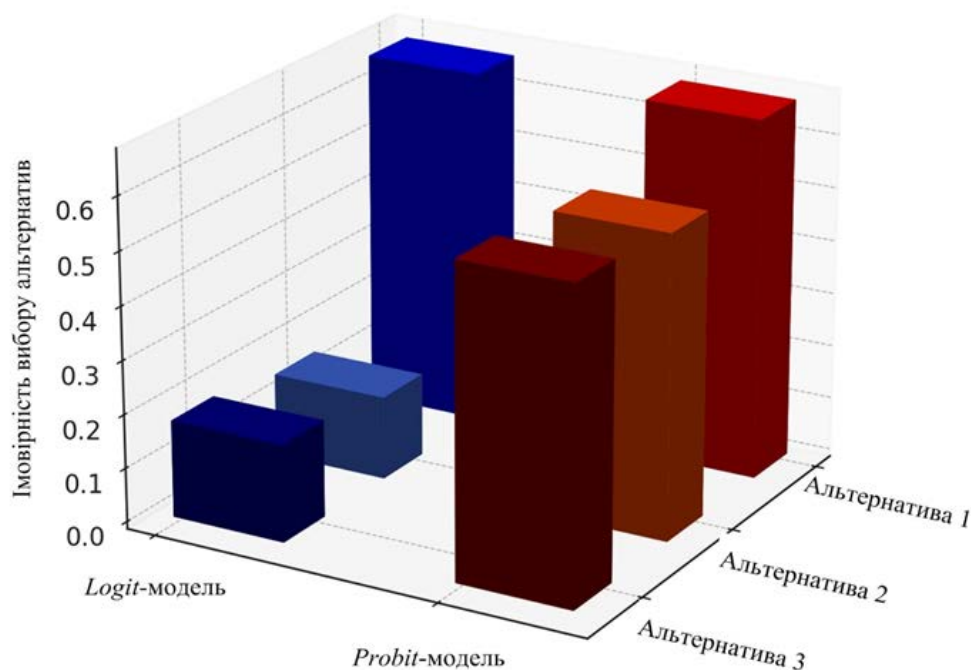


Рис. 6. Ймовірності вибору альтернатив на основі очікуваних корисностей із застосуванням логіт та пробіт моделей

Таким чином, у результаті запропонованих у статті розрахунків, виконаних на основі теорії очікуваної корисності, було обрано альтернативу *A1*

сценарію розвитку "низьковуглецевого" МС є збільшення частки відновлюваних джерел енергії в структурі енергоспоживання міста.

**Висновки з даного дослідження і перспективи подальших досліджень.**

В статті проведено аналіз процесу вибору альтернатив на основі *логіт* та *пробіт* моделей, які враховують вплив випадкових факторів у рамках теорії очікуваної корисності. Отримані результати дозволяють зробити висновки:

– формально підтверджена гіпотеза, що вибір альтернатив залежить від її очікуваної корисності та надано математичне її обґрунтування. Показано, що використання *логіт* та *пробіт* моделей дозволяє оцінити, наскільки суттєво випадковість (шум) впливає на прийняття рішень експертами або особою, яка приймає рішення;

– проведено оцінювання ефективності застосування *логіт* та *пробіт* моделей в умовах випадкових впливів. При незначній зміні показника корисності якоїсь альтернативи *логіт* модель забезпечує значне зростання імовірності її вибору. *Пробіт* модель забезпечує більш плавніше зростання імовірності вибору альтернатив. Отримані результати свідчать про те, що дві моделі вибору альтернатив в умовах впливу невизначеності дають схожі результати, але при умовах інтерпретації вагових коефіцієнтів (наприклад, уподобання експертів) та умовах мінливості показників *логіт* модель – переважніше.

– проведено аналіз прийняття рішень з вибору альтернатив сценарію розвитку МС залежно від параметра чутливості  $\beta$  *логіт* моделі та стандартного відхилення  $\sigma$  у *пробіт* моделі. Показано критичні значення відповідних параметрів, за яких вибір альтернатив стає майже випадковим або, навпаки, повністю детермінованим;

– на основі дослідження обґрунтовано можливість практичного застосування при розробці експертних систем підтримки прийняття рішень, а також прогнозуванні поведінки експертів при прийнятті рішень з формування політики сталого розвитку МС;

– в статті показано, що незважаючи на інтуїтивну зрозумілість того, що зазвичай експерти обирають найкращу альтернативу, проведене дослідження дозволяє кількісно оцінювати процеси прийняття рішень, враховувати рівень невизначеності залежно від впливу випадкових факторів та враховувати переваги експертів.

Проведене в статті дослідження підтверджує ефективність використання *логіт* та *пробіт* моделей для моделювання вибору, особливо в умовах невизначеності. Основним недоліком цих моделей є обмежена кількість альтернатив, яку вони можуть коректно обробляти. При збільшенні числа альтернатив понад 10 доцільно застосовувати мультиноміальні *логіт* моделі

або пробіт-моделі з довільною коваріацією, що дозволяють точніше враховувати взаємозв'язки між варіантами вибору.

Отримані результати мають практичну цінність для прийняття рішень в сферах розроблення програм та вибору напрямів енергоефективного розвитку МС, розвитку "безвуглецевого" транспорту, розвитку соціальної інфраструктури міста. Дозволяють прогнозувати поведінку громадян та розробляти ефективні програми, орієнтовані на реальні потреби населення.

### Список джерел:

1. Довбенко М. Теорія перспектив // Економіка України. – 2004. – №6. С. 87–91. <https://www.monographies.ru/ru/book/section?id=4239>
2. Іваненко В.І., Пасічніченко І.О. Очікувана корисність у ситуаціях прийняття рішень з випадковими у широкому сенсі наслідками / В.І. Іваненко, І.О. Пасічніченко // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2015. – № 2. – С. 51-58. <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/116053>
3. Матвєєва О.М., Бондаренко О.М. Дуксенко О.П. Дослідження ризику у процесі прийняття управлінських рішень / О.М. Матвєєва, О.М. Бондаренко О.П. Дуксенко // Економіка та управління підприємствами. Випуск 52. 2021 – С. 94–98. <https://doi.org/10.32843/infrastructure52-16>
4. Момот О.І., Кашура С.І. Обґрунтування використання теорії корисності при прийнятті управлінських рішень щодо інноваційної діяльності підприємства // Наукові праці ДонНТУ. Серія: економічна. 2008, Випуск 35, С. 132–136. <http://ea.donntu.ru:8080/handle/123456789/12469>
5. Форкун І., Фрадинський О. Економіко-математичне моделювання девіантної поведінки суб'єктів господарювання (на прикладі сплати податку на прибуток) // Наука молода. – №5. – 2006. – С. 88–92. [https://www.problecon.com/article/?year=2024&abstract=2024\\_1\\_0\\_44\\_51](https://www.problecon.com/article/?year=2024&abstract=2024_1_0_44_51)
6. Anscombe, F.J., & Aumann, R.J. (1963). A Definition of Subjective Probability. *Annals of Mathematical Statistics*, 34(1), 199–205. <https://pages.stern.nyu.edu/~dbackus/Exotic/1Ambiguity/AnscombeAumann%20AMS%2063.pdf>
7. Brian Jeffrey Cohen. (1996) Is Expected Utility Theory Normative for Medical Decision Making. *Medical Decision Making*, 16(1), pp. 1–6. <https://doi.org/10.1177/0272989X9601600101>
8. Buchak, L. (2013). *Risk and Rationality*, Oxford: Oxford University Press. <https://academic.oup.com/book/9439>
9. Conte, Anna; Hey, John D.; Moffatt, Peter G. (2011). Mixture models of choice under risk. *Journal of Econometrics*. 162(1): pp. 79–88. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2009.10.011>
10. David R.J., & Hikaru Hanawa Peterso (2010). Is Expected Utility Theory Applicable? A Revealed Preference Test. *American Journal of Agricultural Economics*. Vol. 92, No. 1 (2010), pp. 16–27. <https://www.jstor.org/stable/40647963>
11. Kemal, O. (2023) Expected utility, independence, and continuity Theory and Decision. *An International Journal for Multidisciplinary Advances in Decsision Science*, Volume 96, Issue 4, pp. 24–35. <https://doi.org/10.1007/s11238-023-09964-6>
12. Linde, J. (2020). Expected Utility and Political Decision Making. In *Oxford Research Encyclopedia of Politics* Oxford University Press, New York. Press. <https://doi.org/10.1093/acrefore/9780190228637.013.885>
13. Lyashchenko, A., Patrakeyev, I., Ziborov, V., Datsenko, L., Mikhno, O. Assessment and management of urban environmental quality in the context of inspire requirements. *Theoretical and Empirical Researches in Urban Management* this link is disabled, 2021, 16(2), pp. 55–71. <http://um.ase.ro/no162/4.pdf>

14. Maarten, S., David R. Shanks. (2013). Decision Making. The Oxford Handbook of Cognitive Psychology. Pp. 682–703. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780195376746.013.0043>
15. Neumann, J. von, & Morgenstern, O. (2007). Theory of Games and Economic Behavior: 60th Anniversary Commemorative Edition (Princeton Classic Editions). Princeton University Press, 776 p. <https://www.jstor.org/stable/j.ctt1r2gkx>
16. Pai Liu. (2023). Decision-making and Utility Theory. Advances in Economics Management and Political Sciences. Proceedings of the 2023 International Conference on Management Research and Economic Development. Pp. 313–320. <https://doi.org/10.54254/2754-1169/26/20230590>
17. Patrakeyev, I., Ziborov, V., Mikhno, O. Estimation of metabolic flows of urban environment based on fuzzy expert knowledge. Geodesy and Cartography (Vilnius), 2020, 46(1), pp. 8–16. <https://doi.org/10.3846/gac.2020.8560>
18. Patrakeyev, I., Ziborov, V., Mikhno, O. Intelligent technology for estimating of urban environment quality. Geographia Technica this link is disabled, 2020, 15(2), pp. 147–160. [http://doi.org/10.21163/GT\\_2020.152.15](http://doi.org/10.21163/GT_2020.152.15)
19. Savage, L. J. (1954). The Foundations of Statistics. New York: Wiley, Inc., 1954, 294 pp. <https://doi.org/10.1002/nav.3800010316>
20. Tsalatsanis A, Hozo I, Kumar A, Djulbegovic B (2015) Dual Processing Model for Medical Decision-Making: An Extension to Diagnostic Testing. PLoS ONE 10(8): e0134800. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0134800>

Ph.D, Docent **Igor Patrakeyev**, Ph.D, Docent **Rovil Nafeev**,  
State University of Information and Communication Technologies,  
Ph.D, Docent **Victor Ziborov**,  
Kyiv National University of Construction and Architecture

## **THE MODELING SYSTEM ADOPTS ADVANCED BINARY MODELS: LOGIT AND PROBIT ANALYSIS**

The article studies the decision-making process under uncertainty using the expected utility theory (EUT). The main focus is on the analysis of the influence of probabilistic noise on the processes of choosing alternatives. To model uncertainty, logit and punched models are used, allowing to take into account the stochastic nature of expert decisions and analyse the influence of random factors on the probability of choosing a certain alternative.

The analysis of mathematical foundations of logit and probit models is carried out, their differences in the approach to the distribution of random factors are shown. A comparative analysis of the models was carried out on the example of choosing alternatives of the "low-carbon" scenario for the development of the urban environment. By modelling the probability of choosing alternatives, a dominant alternative was determined that has the most expected utility. The obtained data allow us to assess the influence of random factors on expert choice and adjust the parameters of models of possible choice of alternatives depending on the conditions for solving problems.

The research results can be used to develop expert decision-making systems, as well as to predict behavioral models in economics, urban development and ecology.

Keywords: expected utility theory; logit model; probit model; uncertainty; stochastic noise; probabilistic modeling; decision making; alternative choice; sustainable urban development.

## REFERENCES

1. Dovbenko M. Theory of prospects // *Economy of Ukraine*. - 2004. - Issue 6. P. 87–91. <https://www.monographies.ru/ru/book/section?id=4239>. {in Ukrainian}
2. Ivanenko V.I., Pasichnichenko I.O. Expected utility in decision-making situations with random consequences in the broad sense / V.I. Ivanenko, I.O. Pasichnichenko // *System Research and Information Technologies*. - 2015. - No. 2. – P. 51–58. <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/116053>. {in Ukrainian}
3. Matveeva O.M., Bondarenko O.M. Duksenko O.P. Risk research in the process of making management decisions / O.M. Matveeva, O.M. Bondarenko O.P. Duksenko // *Economics and Enterprise Management*. Issue 52. 2021 – pp. 94–98. <https://doi.org/10.32843/infrastruct52-16>. {in Ukrainian}
4. Momot O.I., Kashura S.I. Justification of the use of utility theory in making management decisions regarding the innovative activity of an enterprise // *Scientific works of DonNTU*. Series: economic. 2008, Issue 35, pp. 132–136. <http://ea.donntu.ru:8080/handle/123456789/12469>. {in Ukrainian}
5. Forkun I., Fradynskiy O. Economic and mathematical modeling of deviant behavior of business entities (on the example of paying income tax) // *Young Science*. – No. 5. – 2006. – P. 88–92. {in Ukrainian} [https://www.problecon.com/article/?year=2024&abstract=2024\\_1\\_0\\_44\\_51](https://www.problecon.com/article/?year=2024&abstract=2024_1_0_44_51). {in English}
6. Anscombe, F.J., & Aumann, R.J. (1963). A Definition of Subjective Probability. *Annals of Mathematical Statistics*, 34(1), 199–205. <https://pages.stern.nyu.edu/~dbackus/Exotic/1Ambiguity/AnscombeAumann%20AMS%2063.pdf>. {in English}
7. Brian Jeffrey Cohen.(1996) Is Expected Utility Theory Normative for Medical Decision Making. *Medical Decision Making*, 16(1), pp. 1–6. <https://doi.org/10.1177/0272989X9601600101>. {in English}
8. Buchak, L. (2013). *Risk and Rationality*, Oxford: Oxford University Press. <https://academic.oup.com/book/9439>. {in English}
9. Conte, Anna; Hey, John D.; Moffatt, Peter G. (2011). Mixture models of choice under risk. *Journal of Econometrics*. 162(1): pp. 79–88. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2009.10.011>. {in English}

10. David R.J., & Hikaru Hanawa Peterso (2010). Is Expected Utility Theory Applicable? A Revealed Preference Test. *American Journal of Agricultural Economics*. Vol. 92, No. 1 (2010), pp. 16–27. <https://www.jstor.org/stable/40647963>. {in English}
11. Kemal, O. (2023) Expected utility, independence, and continuity Theory and Decision. *An International Journal for Multidisciplinary Advances in Decsision Science*, Volume 96, Issue 4, pp. 24–35. <https://doi.org/10.1007/s11238-023-09964-6>. {in English}
12. Linde, J. (2020). Expected Utility and Political Decision Making. In *Oxford Research Encyclopedia of Politics* Oxford University Press, New York. Press. <https://doi.org/10.1093/acrefore/9780190228637.013.885>. {in English}
13. Lyashchenko, A., Patrakeyev, I., Ziborov, V., Datsenko, L., Mikhno, O. Assessment and management of urban environmental quality in the context of inspire requirements. *Theoretical and Empirical Researches in Urban Management* this link is disabled, 2021, 16(2), pp. 55–71. <http://um.ase.ro/no162/4.pdf>. {in English}
14. Maarten, S., David R. Shanks. (2013). Decision Making. *The Oxford Handbook of Cognitive Psychology*. Pp. 682–703. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780195376746.013.0043>. {in English}
15. Neumann, J. von, & Morgenstern, O. (2007). *Theory of Games and Economic Behavior: 60th Anniversary Commemorative Edition* (Princeton Classic Editions). Princeton University Press, 776 p. <https://www.jstor.org/stable/j.ctt1r2gkx>. {in English}
16. Pai Liu. (2023). Decision-making and Utility Theory. *Advances in Economics Management and Political Sciences. Proceedings of the 2023 International Conference on Management Research and Economic Development*. Pp. 313–320. <https://doi.org/10.54254/2754-1169/26/20230590>. {in English}
17. Patrakeyev, I., Ziborov, V., Mikhno, O. Estimation of metabolic flows of urban environment based on fuzzy expert knowledge. *Geodesy and Cartography (Vilnius)*, 2020, 46(1), pp. 8–16. <https://doi.org/10.3846/gac.2020.8560>. {in English}
18. Patrakeyev, I., Ziborov, V., Mikhno, O. Intelligent technology for estimating of urban environment quality. *Geographia Technica* this link is disabled, 2020, 15(2), pp. 147–160. [http://doi.org/10.21163/GT\\_2020.152.15](http://doi.org/10.21163/GT_2020.152.15). {in English}
19. Savage, L.J. (1954). *The Foundations of Statistics*. New York: Wiley, Inc., 1954, 294 pp. <https://doi.org/10.1002/nav.3800010316>. {in English}
20. Tsalatsanis A, Hozo I, Kumar A, Djulbegovic B (2015) Dual Processing Model for Medical Decision-Making: An Extension to Diagnostic Testing. *PLoS ONE* 10(8): e0134800. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0134800>. {in English}