DOI: 10.32347/2786-7269.2025.11.282-302
УДК 624.014 (688.775.3)
к.т.н., доцент **Білик А.С.**,
artem.bilyk@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9219-920X,
Джанов Л.В., angeldl@ukr.net, ORCID: 0000-0001-5144-3424,
Терновий М.І., maxbox007@gmail.com, ORCID: 0009-0003-7586-7872,
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ ВИСОТИ СТАЛЕВИХ ДВОТАВРІВ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ ЗА МЕТОДИКОЮ МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА

Проведені аналітичні дослідження вибору оптимальної висоти сталевих балок із змінною висотою стінки і полиці по довжині конструкції. Дослідження проведені за методикою множників Лагранжа з урахуванням умов Куна-Такера для визначення достатніх умов пошуку сідловидної точки. Задача сформульована як задача нелінійного математичного програмування. Прийнято, що товщина стінки незмінна по довжині балки. Отримані аналітичні формули для визначення раціональної висоти балки в поточному перерізі за умовами міцності. Отримані аналітичні співвідношення площі і стінки для формування оптимального перерізу та загальної форми балкової конструкції. Наведено приклад пошуку раціональної форми консольної сталевих балок із змінною шириною полиць і стінки завантажену на вільному кінці зосередженою силою. Наведено приклад використання методики для балок постійного перерізу. Підтверджено, що достатніми умовами оптимальності двотаврової балки є рівність площі полиць площі стінки. Такий результат співпадає з дослідженнями інших авторів, що вказує на достовірність отриманих аналітичних досліджень. Також аналогічні дослідження проведені для ідеальних двотаврів з постійною і змінною висотою перерізу. Що важливо для досліджень оптимальної висоти балок із гофрованою стінкою та досліджень наскрізних конструкцій. Результати проведених досліджень використовують під час варіантного проєктування та для початкових даних при використання інших методик оптимального проектування.

Ключові слова: моделювання; металеві конструкції; сталеві двотаврові балки змінного перерізу; ідеальний двотавр оптимальна висота; цільова функція; умови Куна-Такера; методи множників Лагранжа .

Постановка проблеми. Під час розрахунку сталевих балок двотаврового перерізу при прольотах та при різних навантаженнях, виникає можливість за рахунок зміни перерізу по довжині сталевої двотаврової конструкції знаходити оптимальне рішення конструкції. Вирішення таких задач важливе на всіх етапах проєктування. На етапі варіантного проектування це суттєво скорочує час і витрати на пошук раціональної конструкції. При збільшених навантаженнях зміна перерізу двотаврових конструкції по довжині прольоту дає особливий економічний ефект, який зростає під час використання високоміцних сталей. Тому задача пошуку оптимальної конструкції із сталевого двотавра, яка працює на згин є важливою науково-технічною проблемою. Особливо важливим є проведення досліджень з позиції удосконалення методологічного апарату, визначення можливостей використання оптимальних конструкцій із змінною висотою стінки та змінною шириною полиць, а також із змінною товщиною стінки.

Фундаментальними роботами вибору оптимальних конструкції двотаврового перерізу при статичному навантаженні є роботи [1,15,25,26,36], які включають і історичні аспекти розвитку теорії і методів оптимального проектування і сучасні підходи та проблеми.

Методологія досліджень оптимальних параметрів сталевих балок постійного перерізу багато років базувалась на вирішенні елементарної задачі пошуку оптимальної висоти із двотавровим так і замкнутим перерізом [1,6, 9,14,15]. Такий підхід був розповсюджений і для пошуку раціоанальних комбінованих шпренгельних конструкцій сталевих ферм покриттів із використанням в поясах балкових профілів перерізом [6, 9,10,11,29]. Такий підхід давав і достатні результати при пошуку оптимальної висоти двотаврів з гофрованою стінкою [13], а також балок постійного перерізу з урахуванням розвитку обмежених пластичних деформацій [6]. Модифікація вибору оптимального рішення за пошуком екстремумів цільової функції був застосований і для визначення оптимальної геометрії розмірів балок рам із змінною висотою стінки з постійним перерізом полиць при пружні роботі сталі [5,8], а також при розвитку обмежених пластичних деформацій [7]. Узагальнена задача пошуку оптимальних параметрів балок постійного перерізу з використанням метода Куна-Такера приведена у фундаментальній роботі [12].

Удосконалення методів вибору оптимального рішення сталевих конструкцій з урахуванням дискретності сортаменту привело до появи нових напрямків розвитку методологій з обмеженнями у вигляді алгортимчіних функцій із створенням роя сталевих конструктивних форм за праметрами сортаменту [2]. Отримали суттєвих розвиток градієнтні методи першого порядку, що малочутливі до початкового проекту та кількості обмежень у формі додаткових рівнянь на основі генетичних алгоритмів та їх модифікації для вирішення задач багатомірної безумовної оптимізації балкових систем так і стрижневих конструкцій [35,36,38, 40].

Новим напрямком оптимального проектування балкових і стрижневих будівельних систем стало удосконалення методики оптимального проектування з урахування динамічних та імпульсних навантажень і, відповідно, врахування динамічних властивостей самої конструктивної системи [3,24,30,31,34,39].

Нові навантаження та розрахунок сталевих конструкцій рам і стрижневих конструкцій на живучість та дію температур [5,17,19,20,21,22,23 27,33,37] формулюють задачі із створення сталевих балкових елементів змінного перерізу з урахуванням зміни товщини стінок і ширини полиць з метою зменшення витрат сталі і зменшення витрат на вогнезахист із збереженням надійності довготривалої експлуатації.

Складність вирішення задач оптимального проектування балок змінного перерізу пов'язана з необхідністю врахування складного напружено-деформованого стану і врахування можливої втрати стійкості плаского форми згину [18, 29, 32, 33, 41,42]. Такі задачі вирішуються градієнтними методами та їх модифікаціями [29, 32, 33]. Також розвивається підхід за яким на першому етапі оптимального проектування використовується методологію множників Лагранжа із умови плавності функцій зміни сортаменту , а на другому етапі розрахунок виконується методом скінчених елементів [29, 33]. Це пояснюється із можливою не випуклістю (пологістю) області множини можливих рішень, наявністю мультимодальністю, дискретною зміною шуканих параметрів, складністю запису аналітичних рівнянь апроксимації конструктивних, технологічних, економічних та експлуатаційних вимог [3,5].

Для варіантного проектування залишаються необхідність розвитку і розповсюдження методології множників Лагранжа, як одна з ефективних методик [1,4,12,25,32,33,36] на вибір оптимальних реконструктивних рішень балок змінного перерізу із змінною висотою стінки і полиць.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянута балка двотаврового перерізу складена з верхньої та нижньої полиці, які між собою з'єднані стінкою. В подальшому позначено розміри двотаврового ригеля $h_z = h_0(1-\gamma_h z/l_b)$ – висота ригеля змінного перерізу, $b_{f,z} = b_{f,0}(1-\gamma_b z/l_b)$ – ширина полиці ригеля змінного пернерізу, l_b– прогін балки. Гнучкість стінки $\lambda_\omega \approx h_0/t_\omega$, умовна гнучкість стінки $\overline{\lambda}_{u\omega} \ge \overline{\lambda}_\omega \approx \lambda_\omega\sqrt{\frac{R_y}{E}}$. Локальна стійкість полиць і стінки прийнята забезпеченою.

Площа полиць така: $2A_{f,z} = 2b_{f,z}t_f$ і товщини стінки t_w, тоді можна маса балки змінного перерізу буде (2.1). $2A_f h_o + t_w h_o = A_b$. Приймається Задача оптимізації є пошук мінімальної маси балки змінного перерізу.

$m_{b,z}=2\rho l_0\left(\frac{A_{f,0}+A_{f,n}}{2}\right)+\rho l_0\left(\frac{A_{w,0}+A_{w,n}}{2}\right)=2\rho l_0\left(\frac{A_{f,0}+A_{f,n}}{2}\right)+\rho l_0\left(\frac{h_{w,0}+h_{w,n}}{2}\right)t_w.$ $A_{f,zk}=\left(\frac{A_{f,0}+A_{f,n}}{2}\right);\quad h_{w,zk}=\left(\frac{h_{w,0}+h_{w,n}}{2}\right)$ $m_{b,z}=2\rho l_0 A_{f,zk}+\rho l_0 h_{w,zk}t_w$ $h_z=h_0(1-\gamma_h\frac{z}{l_b})\rightarrow z=l_b\rightarrow h_{z=l_b}=h_n\rightarrow\gamma_h=(1-\frac{h_n}{h_0}).$ $b_{f,z}=b_{f,0}(1-\gamma_h\frac{z}{l_b})\rightarrow z=l_b\rightarrow b_{f,z=l_b}=b_{f,n}\rightarrow\gamma_h=(1-\frac{b_{f,n}}{b_{f,0}}).$ $A_{f,z}=t_f b_{f,0}(1-\gamma_b\frac{z}{l_b})$ $A_{w,z}=t_w b_{f,0}(1-\gamma_h\frac{z}{l_b})$	(1)

Геометричні характеристики перерізу разом з формулами (2.1) дають взаємозалежність розмірів полиць і стінки двотавра з висотою перерізу. А також залежність зміни по довжині.

$I_{x,0}=2\frac{A_{f,0}h_0^2}{4}+\frac{t_w h_0^3}{12}=\frac{A_{f,0}h_0^2}{2}\left(1+\frac{t_w h_0}{6A_{f,0}}\right);$ $W_{x,0}=\frac{2I_{x,0}}{h_0}=A_{f,0}h_0+\frac{t_w h_0^2}{6}=A_{f,0}h_0\left(1+\frac{t_w h_0}{6A_{f,0}}\right).$ $I_{x,z}=2\frac{A_{f,z}h_z^2}{4}+\frac{t_w h_z^3}{12}=\frac{A_{f,z}h_z^2}{2}\left(1+\frac{t_w h_z}{6A_{f,z}}\right).$ $W_{x,z}=\frac{2I_{x,z}}{h_z}=A_{f,z}h_z+\frac{t_w h_z^2}{6}=A_{f,z}h_z\left(1+\frac{t_w h_z}{6A_{f,z}}\right).$	(2)

Задача оптимального проектування сталевих балок змінного перерізу є задача нелінійного математичного програмування (2.3), [1]. Цільова функція мінімальної маси витрат сталі (2.3) об'єднує всі геометричні параметри перерізу балки , та їх зміну по довжині (2.1,2.2).

$m_{b,z}=2\rho l_0 A_{f,k}+\rho l_0 h_{w,k}t_w\rightarrow\min$	(3)

В якості обмежень прийняті обмеження за міцністю.

$u_1\left(h_z, t_{w,z}, A_{f,z}\right) = \frac{M_{x,z} h_k}{2 I_{x,z}} - R_y \gamma_c \ge 0.$ $u_2\left(h_z, t_{w,z}, A_{f,k}\right) \frac{Q_z}{t_{w,z} h_z} - R_s \gamma_c \ge 0.$ $t_{w,z} = \frac{h_0}{\lambda_{w0}}\left(\frac{h_0}{h_z}\right)^m \to u_2\left(h_z, t_{w,z}, A_{f,k}\right) \frac{Q_z}{t_{w,z} h_z} - R_s \gamma_c \ge 0.$ $A_{f,z} \ge 0.$ $I_{x,z} - I_{x,d} \ge 0$	(4)

Прийнятті умови опуклості цільової функції (3). Цільова функція (3), дає можливість знайти точку глобального мінімума (сідловидну точку) на основі плавного порівняння варіантів. Це досягається тим, що відходять від дискретності сортаменту товщини листів і раціоналізації розкрою листа з позицій мінімізації відходів. Приймаються умови плавної зміни геометричні розмірів сталевої балки, а отримані товщині висоти листів будуть виготовлені.

Сформована задача нелинейного математического програмування (3, 4) описується в просторі змінних h_z , A_z , $t_{w,z}$ та обмежувальними функціями у вигляді нерівностей (4). Перша нерівність обмеження за міцністю кожного перерізу при згинанні по довжині балки, друга нерівність обмеження міцності на зріз стінки двотавра кожного перерізу по довжині балки. Останні дві умовами обмеження (4) є обмеження по жорсткості та приймається умова значення площі перерізу полиць позитивними.

Рівняння (5) називають рівняннями умова доповнюючої нежорсткості.

$u_1\left(h_z, t_{w,z}, A_{f,z}\right) = \frac{M_{x,z} h_z}{2 I_{x,z}} - R_y \gamma_c = 0. \qquad u_1\left(h_z, t_{w,z}, A_{f,z}\right) \frac{Q_z}{t_{w,z} h_z} - R_s \gamma_c = 0.$	(5)

Складність вирішення задачі полягає в тому, що при зменшенні висоти перерізу поперечна сила може наростати, а площа перерізу зменшуватись, тому на першому етапі вирішується задача мінімізації перерізу двотаврів, коли приймається обмеження міцності стінки неактивною.

Найбільш прийнятим підходом для вирішення цих задач (2) є використання методу множників Лагранжа [4] з урахуванням обмежень (4). Дослідження виконані при умові, що стінка має постійну товщину.

$t_w = t_{w,z} = \frac{h_0}{\lambda_{w0}}\left(\frac{h_0}{h_z}\right)^{m=0} = \frac{h_0}{\lambda_{w0}} = const \rightarrow$ $F(\lambda_m, A_{f,z}, h_z) = \lambda_{m1}\rho l_0\left(2A_{f,z} + t_w h_z\right) + \lambda_{m2}u_1\left(h_z, t_w, A_{f,z}\right).$ $F(\lambda_m, A_{f,z}, h_z) = \lambda_{m1}\rho l_0\left(2A_{f,z} + t_w h_z\right) + \lambda_{m2}\left[\frac{M_{x,z}h_z}{2\left(2\frac{A_{f,z}h_z^2}{4} + \frac{h_z^3}{12}\frac{h_0}{\lambda_{w0}}\right)} - R_y\gamma_c\right].$	(6)

За рішенням оптимізаційної задачі точки екстремума повинні задовольняти умовам Куна-Такера [4,12]. За результатами диференціювання рівнянь системи (7) з урахуванням (5) приходимо до рішення системи трьох алгебраїчних рівнянь (8) з трьома невідомими членами: h_z , A_z , λ_{m1} .

$\begin{cases} \frac{\partial F(\lambda_{m1}, A_{f,zk}, h_{zk})}{\partial A_{f,z}} = \lambda_{m1}\frac{\partial m_{b,z}}{\partial A_{f,k}} + \lambda_{m2}\frac{\partial u_1\left(h_{zk}, A_{f,zk}\right)}{\partial A_{f,k}} = 0. \\ \frac{\partial F(\lambda_{m1}, A_{f,zk}, h_k)}{\partial h_z} = \lambda_{m1}\frac{\partial m_{b,z}}{\partial h_k} + \lambda_{m2}\frac{\partial u_2\left(h_{zk}, A_{f,zk}\right)}{\partial h_k} = 0. \\ \frac{\partial F(\lambda_{m1}, A_{f,zk}, h_{zk})}{\partial \lambda_{m1}} = \lambda_{m1}\frac{\partial m_{b,z}}{\partial \lambda_{m2}} + \lambda_{m2}\frac{\partial u_2\left(h_{zk}, A_{f,zk}\right)}{\partial \lambda_{m2}} = 0. \end{cases}$	(7)
$\begin{cases} \frac{\partial F(\lambda_{m1}, A_{f,zk}, h_{zk})}{\partial A_{f,zk}} = \lambda_{m1}\frac{\partial\left[\rho l_0\left(2A_{f,zk} + \frac{h_0}{\lambda_{w0}}h_{zk}\right)\right]}{\partial A_{f,zk}} + \lambda_{m2}\frac{\partial\left[\frac{M_{x,z}h_{zk}}{2\left(2\frac{A_{f,zk}h_{zk}^2}{4} + \frac{h_{zk}^3}{12}\frac{h_0}{\lambda_{w0}}\right)} - R_y\gamma_c\right]}{\partial A_{f,zk}} = 0. \\ \frac{\partial F(\lambda_{m1}, A_{f,zk}, h_z)}{\partial h_z} = \lambda_{m1}\frac{\partial\left[\rho l_0\left(2A_{f,zk} + \frac{h_0}{\lambda_{w0}}h_{zk}\right)\right]}{\partial h_z} + \lambda_{m2}\frac{\partial\left[\frac{M_{x,z}h_{zk}}{2\left(2\frac{A_{f,z}h_{zk}^2}{4} + \frac{t_w h_{zk}^3}{12}\frac{h_0}{\lambda_{w0}}\right)} - R_y\gamma_c\right]}{\partial h_{zk}} = 0. \\ \frac{\partial F(\lambda_{m1}, A_{f,zk}, h_{zk})}{\partial \lambda_{m2}} = \frac{\partial\left[\rho l_0\left(2A_{f,zk} + \frac{h_0}{\lambda_{w0}}h_{zk}\right)\right]}{\partial \lambda_{m2}} + \frac{\partial \lambda_{m2}}{\partial \lambda_{m2}}\left[\frac{M_{x,z}h_{zk}}{2\left(2\frac{A_{f,zk}h_{zk}^2}{4} + \frac{t_w h_{zk}^3}{12}\frac{h_0}{\lambda_{w0}}\right)} - R_y\gamma_c\right] = 0. \end{cases}$	(8)

Далі перетворення приводять до системи двох нелінійних алгебраїчних рівнянь за рахунок отримання з першого рівняння співвідношення (10).

$$\begin{cases} 2\lambda_{m1}\rho l_0 - \lambda_{m2}\dfrac{M_{x,z}h_z}{\left(A_{f,z}h_z + \dfrac{h_z^2}{6}\dfrac{h_0}{\lambda_{w0}}\right)^2} = 0 \\ \lambda_{m1}\rho l_0 \dfrac{h_0}{\lambda_{w0}} + \lambda_{m2}\left[\dfrac{-M_{x,z}\left(A_{f,zk} + 2\dfrac{h_{zk}}{6}\dfrac{h_0}{\lambda_{w0}}\right)}{\left(A_{f,z}h_z + \dfrac{h_z^2}{6}\dfrac{h_0}{\lambda_{w0}}\right)^2}\right] = 0 \end{cases}.$$	(9)
$$\dfrac{M_{x,z}h_{zk}}{2\left(2\dfrac{A_{f,zk}h_{zk}^2}{4} + \dfrac{h_{zk}^3}{12}\dfrac{h_0}{\lambda_{w0}}\right)} = R_y\gamma_c \cdot \left[\dfrac{M_{x,z}}{\left(A_{f,z}h_z + \dfrac{h_z^2}{6}\dfrac{h_0}{\lambda_{w0}}\right)} - R_y\gamma_c\right] = 0$$	(10)

Умови міцності (10) відносяться до умов доповнюючої нежорсткості.

Перших два рівнянь дають систему алгебраїчних рівнянь (2.10) з двома невідомими.

Тепер є відношення коефіцієнтів (11).

$$2\lambda_{m1}\rho l_0 = \lambda_{m2}\dfrac{M_{x,z}h_z}{\left(A_{f,z}h_z + \dfrac{h_z^2}{6}\dfrac{h_0}{\lambda_{w0}}\right)^2} \to \lambda_{m1}\rho l_0 = \lambda_{m2}\dfrac{M_{x,z}}{2\left(A_{f,z}h_z + \dfrac{h_z^2}{6}\dfrac{h_0}{\lambda_{w0}}\right)}\dfrac{h_z}{\left(A_{f,z}h_z + \dfrac{h_z^2}{6}\dfrac{h_0}{\lambda_{w0}}\right)}$$ $$\dfrac{M_{x,z}}{\left(A_{f,z} + \dfrac{h_z}{6}\dfrac{h_0}{\lambda_{w0}}\right)} \geq R_y\gamma_c \to \lambda_{m1} = \dfrac{\lambda_{m2}}{2\rho l_0}R_y\gamma_c\dfrac{h_z}{\left(A_{f,z}h_z + \dfrac{h_z^2}{6}\dfrac{h_0}{\lambda_{w0}}\right)}.$$	(11)

Умовний критерій необхідних умов оптимальності набуває вигляду при заміні в другому рівнянні (9) коефіцієнтів за відношенням (2.11).Скорочення і використання умов міцності дає таке рівняння критерію оптимальності. В теорії металевих конструкцій для попередніх розрахунках при варіантному проєктуванні прийнято виконувати заміну товщини стінки на залежність між висотою балки і гнучкістю стінки $\lambda_w = h_w / t_w$. Тепер оптимальна висота поточного перерізу двотавра змінного перерізу буде визначатися з урахуванням стійкості перерізу з максимальної висотою стінки.

$$h_{zk}^2 = 2\frac{M_{x,z}\lambda_{w0}\left(\dfrac{6A_{f,zk}\lambda_{w0}}{h_0 h_{zk}}+2\right)}{h_0 R_y \gamma_c\left(\dfrac{6A_{f,zk}\lambda_{w0}}{h_0 h_z}+1\right)}.$$	(12)
$$h_{zk} = \sqrt{2\frac{\left(\dfrac{A_{f,zk}\lambda_{w0}}{h_{zk}h_0}+\dfrac{1}{3}\right)}{\left(\dfrac{A_{f,zk}\lambda_{w0}}{h_{zk}h_0}+\dfrac{1}{6}\right)}}\sqrt{\frac{M_{x,z}\lambda_{w0}}{h_0 R_y \gamma_c}}.$$	(13)
$$h_{zk} = \sqrt{2\frac{\left(\dfrac{2A_{f,zk}\lambda_{w0}}{h_{zk}h_0}+\dfrac{2}{3}\right)}{\left(\dfrac{2A_{f,zk}\lambda_{w0}}{h_{zk}h_0}+\dfrac{1}{3}\right)}}\sqrt{\frac{M_{x,z}\lambda_{w0}}{h_0 R_y \gamma_c}}$$	(14)

Дослідження показали, що множина оптимальних рішень балок змінного перерізу може бути достатньо значною, так як залежить від відносної величини - співвідношення площі полок до площі стінки. Але також є достатня залежність від площі стінки. Товщина площі стінки вибирається із умов міцності, стійкості і зведених напружень, так як сприймає не тільки дотичні, а і нормальні напруження.

$$z=0\rightarrow\lambda_{m1}\frac{\partial\left[\rho l_0\left(2A_{f,0}+\dfrac{h_0^2}{\lambda_{w0}}\right)\right]}{\partial A_{f,0}}+\lambda_{m2}\frac{\partial\left[\dfrac{M_{x,0}}{\left(A_{f,0}h_0+\dfrac{h_0^3}{6\lambda_{w0}}\right)}-R_y\gamma_c\right]}{\partial A_{f,0}}=0.$$ $$z=0\rightarrow\lambda_{m1}\frac{\partial\left[\rho l_0\left(2A_{f,0}+\dfrac{h_0^2}{\lambda_{w0}}\right)\right]}{\partial h_0}+\lambda_{m2}\frac{\partial\left[\dfrac{M_{x,0}}{\left(A_{f,0}h_0+\dfrac{h_0^3}{6\lambda_{w0}}\right)}-R_y\gamma_c\right]}{\partial h_0}=0.$$. $$\frac{\partial\left[\rho l_0\left(2A_{f,zk}+\dfrac{h_0^2}{\lambda_{w0}}\right)\right]}{\partial\lambda_{m2}}+\frac{\partial\lambda_{m2}}{\partial\lambda_{m2}}\left[\frac{M_{x,z}}{\left(A_{f,0}h_0+\dfrac{h_0^3}{6\lambda_{w0}}\right)}-R_y\gamma_c\right]=0.$$	(15)

Але для визначення висоти перерізу з максимальною висотою стінки *h0* буде вірний аналітичний вираз за методом множників Лагранжа. Така задача і для максимального перерізу є задачею нелінійного математичного програмування.

Система рівнянь (8) для максимального початкового перерізу балки з максимальною висотою має вигляд (15). Рішення за прийнятою методологією буде у вигляді системи.

$\lambda_{m1} 2\rho l_0 - \lambda_{m2} \dfrac{M_{x,0} h_0}{\left(A_{f,0} h_0 + \dfrac{h_0^3}{6\lambda_{w0}}\right)^2} = 0.$ $2\lambda_{m1}\rho l_0 \dfrac{h_0}{\lambda_{w0}} - \lambda_{m2} \dfrac{M_{x,0}\left(A_{f,0} + 3\dfrac{h_0^2}{6\lambda_{w0}}\right)}{\left(A_{f,0} h_0 + \dfrac{h_0^3}{6\lambda_{w0}}\right)^2} = 0.$	(16)

З урахуванням умов міцності (10) перш рівняння (16) стає рівнянням для визначення коефіцієнта λ_{m1} приймає запис.

$$\frac{M_{x,0}}{\left(A_{f,0} h_0 + \dfrac{h_0^3}{6\lambda_{w0}}\right)} = R_y \gamma_c \to 2\lambda_{m1}\rho l_0 = \lambda_{m2} \frac{M_{x,0} h_0}{\left(A_{f,0} h_0 + \dfrac{h_0^3}{6\lambda_{w0}}\right)^2}.$$

$2\lambda_{m1}\rho l_0 = \lambda_{m2} \dfrac{R_y \gamma_c h_0}{\left(A_{f,0} h_0 + \dfrac{h_0^3}{6\lambda_{w0}}\right)}.$	(17)

Друге рівняння системи (16) з урахуванням (17) дає критерій вибору оптимального рішення.

$$\lambda_{m2} \frac{R_y \gamma_c}{\left(A_{f,0} h_0 + \dfrac{h_0^3}{6\lambda_{w0}}\right)} \frac{h_0^2}{\lambda_{w0}} = \lambda_{m2} \frac{M_{x,0}\left[A_{f,0} + 3\dfrac{h_0^2}{6\lambda_{w0}}\right]}{\left(A_{f,0} h_0 + \dfrac{h_0^3}{6\lambda_{w0}}\right)^2} \to \frac{h_0^2}{\lambda_{w0}} = \frac{M_{x,0}\left[A_{f,0} + \dfrac{h_0^2}{2\lambda_{w0}}\right]}{R_y \gamma_c h_0 \left(A_{f,0} + \dfrac{h_0^2}{6\lambda_{w0}}\right)}.$$

Остаточно критерій пошуку оптимальної висоти максимального перерізу сталевої балки двотаврового перерізу є таким.

$h_0^3 = 3\dfrac{M_{x,0}\lambda_{w0}\left[\dfrac{2A_{f,0}\lambda_{w0}}{h_0^2}+1\right]}{R_y\gamma_c\left(\dfrac{6A_{f,0}\lambda_{w0}}{h_0^2}+1\right)}$ $h_0 = \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\dfrac{M_{x,0}\lambda_{w0}\left[\dfrac{2A_{f,0}\lambda_{w0}}{h_0^2}+1\right]}{R_y\gamma_c\left(\dfrac{6A_{f,0}\lambda_{w0}}{h_0^2}+1\right)}}$	(18)

Достатні умови вибору максимальної оптимальної висоти двотавра моментально знаходять з умови (16).

$$\lambda_{m1}2\rho l_0 = \lambda_{m2}\frac{M_{x,0}h_0}{\left(A_{f,0}h_0+\dfrac{h_0^3}{6\lambda_{w0}}\right)^2} = 0.$$

$$\lambda_{m2}\frac{M_{x,0}h_0}{\left(A_{f,0}h_0+\dfrac{h_0^3}{6\lambda_{w0}}\right)^2}\frac{h_0}{\lambda_{w0}} - \lambda_{m2}\frac{M_{x,0}\left(A_{f,0}+3\dfrac{h_0^2}{6\lambda_{w0}}\right)}{\left(A_{f,0}h_0+\dfrac{h_0^3}{6\lambda_{w0}}\right)^2} = 0$$

Далі після скорочень достатні умови оптимальності будуть вказувати на співвідношення площі полиць і стінок оптимального перерізу.

$$\frac{h_0^2}{\lambda_{w0}} = A_{f,0} + 3\frac{t_w h_0^2}{6\lambda_{w0}} \to \frac{h_0^2}{\lambda_{w0}} = A_{f,0} + \frac{h_0^2}{2\lambda_{w0}} \to h_0^2 = 2A_{f,0}\lambda_{w0} \to h_0 = \sqrt{2A_{f,0}\lambda_{w0}}$$

Отримані аналітичні вирази необхідних умов оптимального перерізу співпадають з дослідженнями інших авторів для балок постійного перерізу, що вказує на достовірність проведених досліджень.

$h_0 = \sqrt{2A_{f,0}\lambda_{w0}}$ $h_0 t_w = 2A_{f,0}.$	(19)

Заміна співвідношення площі полиці і стінки для оптимального перерізу за (19) у критерії (18) приводить до відомого рівняння визначення оптимальної висоти двотаврових балок постійного перерізу, отримані іншими аналітичними викладками (20).

$$h_0 = \sqrt{2A_{f,0}\lambda_{w0}} \rightarrow h_0 = \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\frac{M_{x,0}\lambda_{w0}\left[\frac{2A_{f,0}\lambda_{w0}}{h_0^2}+1\right]}{R_y\gamma_c\left(\frac{6A_{f,0}\lambda_{w0}}{h_0^2}+1\right)}} \rightarrow h_0 = \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\frac{M_{x,0}\lambda_{w0}\left[1+1\right]}{R_y\gamma_c\left(3+1\right)}} \rightarrow$$

$$h_0 = \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\frac{2M_{x,0}\lambda_{w0}}{4R_y\gamma_c}}.$$

$h_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{\frac{M_{x,0}\lambda_{w0}}{R_y\gamma_c}}$	(20)

Таким чином, отримано важливий результат для проектування двотаврових балок змінного перерізу з постійною товщиною стінки з позицій і вибору максимальної висоти двотавра (20) так і проміжних перерізів (14).

У формулі (14) для визначення висоти поточного перерізу (по середині балки із змінною висотою стінки) із постійною товщиною має про співвідношення для оптимального перерізу.

$h_{zk}t_w = 2A_{f,zk}.$ $t_w = \frac{h_0}{\lambda_{w0}} \rightarrow h_{zk}\frac{h_0}{\lambda_{w0}} = 2A_{f,zk}.$	(21)

$h_{zk} = \sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{M_{x,zk}\lambda_{w0}}{h_0R_y\gamma_c}}$	(22)

Формула (22) показує залежність оптимальної висоти двотавра по середині довжини балки ($z=z_k$) із плавно-змінними перерізом. Відмітимо, що висота двотавра зменшується більш повільно ніж зменшення згинального моменту.

Приклад 1. Визначити раціональну конструкцію двотаврової балки із змінною висотою стінки завантажену на вільному кінці зосередженою силою $P = Q_0$, площа полиць постійна: $A_{f,0} = A_{f,z}$ =const. А згинальний момент змінюється відповідно лінійно $M_{x,z}=P\ l_0\ (1-z/l_0)$.

З формулою (12) оптимальна висота балки по середині прольоту буде.

$$M_{x,z} = Pl_0\left(1 - z / l_0\right) \to h_{zk} = \sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{M_{x,zk}\lambda_{w0}}{h_0 R_y \gamma_c}} = \sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{Pl_0\left(1 - z / l_0\right)\lambda_{w0}}{h_0 R_y \gamma_c}}$$

$$z_k = \frac{l_0}{2} \to h_{zk} = \sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{Pl_0\lambda_{w0}}{2h_0 R_y \gamma_c}} = \sqrt{\frac{5}{4}}\sqrt{\frac{Pl_0\lambda_{w0}}{h_0 R_y \gamma_c}}$$

За формулою (20) оптимальна висота балки опорного перерізу із максимальним значенням набуває взапису.

$$M_{x,z} = Pl_0\left(1 - z / l_0\right) \to h_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{\frac{M_{x,0}\lambda_{w0}}{R_y \gamma_c}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{\frac{M_{x,0}\lambda_{w0}}{R_y \gamma_c}}$$

$$z_0 = 0 \to h_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{\frac{Pl_0\lambda_{w0}}{R_y \gamma_c}}.$$

Таким чином, визначена форма балки з позицій оптимального проєктування.

$$\frac{h_{z=l_0/2}}{h_{z=0}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{4}}\sqrt{\frac{Pl_0\lambda_{w0}}{h_0 R_y \gamma_c}}}{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{\frac{Pl_0\lambda_{w0}}{R_y \gamma_c}}} \to \left(\frac{h_{z=l_0/2}}{h_{z=0}}\right)^6 = \frac{\left(\frac{5}{4}\frac{Pl_0\lambda_{w0}}{h_0 R_y \gamma_c}\right)^3}{\left(\frac{3}{2}\frac{Pl_0\lambda_{w0}}{R_y \gamma_c}\right)^2}.$$

$$\left(\frac{h_{z=l_0/2}}{h_{z=0}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{12}}\sqrt[6]{\frac{W_{x,0}\lambda_{w0}}{h_0^3}} \approx \sqrt[6]{\frac{W_{x,0}\lambda_{w0}}{h_0^3}}.$$	(23)

Це нова формула оптимального проектування сталевих двотаврів змінного перерізу.

Приклад 2. Цікавою задачею визначення оптимальна висота ідеального двотавра, коли вага стінки враховується і вона сприймає поперечну силу, але згинальний момент сприймає тільки полиці двотавра. Для такої задачі умови (4) мають запис.

$$I_{x,zk} = \frac{A_{f,zk}h_{zk}^2}{2} \to W_{x,zk} = \frac{2I_{x,zk}}{h_{zk}} = A_{f,zk}h_{zk}$$

$$u_1\left(h_z, t_{w,z}, A_{f,z}\right) = \frac{M_{x,z}}{A_{f,zk}h_{zk}} - R_y\gamma_c \ge 0.$$

Запис функції (6) спроститься.

$$F(\lambda_m, A_{f,z}, h_z) = \lambda_{m1}\rho l_0\left(2A_{f,z} + t_w h_z\right) + \lambda_{m2}\left(\frac{M_{x,z}}{A_{f,zk}h_{zk}} - R_y\gamma_c\right).$$	(24)

Подальші перетворення аналогічні (7…11) приводять до системи рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_{m1} = \dfrac{\lambda_{m2}}{2\rho l_0} \dfrac{M_{x,z}}{A_{f,zk}^2 \ h_{zk}} \\ \lambda_{m1}\rho l_0 \left(\dfrac{h_0}{\lambda_{w0}}\right) - \lambda_{m2} \dfrac{M_{x,z}}{A_{f,zk} h_{zk}^2} = 0 \\ \dfrac{M_{x,z}}{A_{f,z} h_{zk}} - R_y \gamma_c = 0. \end{cases}$$

Рішення отриманої системи дає достатні умови для визначення оптимальної висоти ідеального двотавра із змінними перерізом.

$$\lambda_{m1} = \frac{\lambda_{m2}}{2\rho l_0} \frac{M_{x,z}}{A_{f,zk}^2 \ h_{zk}} = \frac{\lambda_{m2}}{2\rho l_0} \frac{R_y \gamma_c}{A_{f,zk}}.$$

$$\frac{\lambda_{m2}}{2} \frac{R_y \gamma_c}{A_{f,zk}} \left(\frac{h_0}{\lambda_{w0}}\right) - \lambda_{m2} \frac{M_{x,z}}{A_{f,zk} \ h_{zk}^2} = 0 \to h_{zk}^2 = \frac{2M_{x,z}\lambda_{w0}}{R_y \gamma_c \ h_0}.$$

$h_{zk} = \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{M_{x,z}\lambda_{w0}}{R_y \gamma_c \ h_0}}.$	(24)

Рішення отриманої системи дає також одночасно і необхідні умови для визначення оптимальної висоти ідеального двотавра із змінними перерізом.

$$\frac{M_{x,z}}{A_{f,zk}^2 \ h_{zk}} \rho l_0 \left(\frac{h_0}{\lambda_{w0}}\right) - \lambda_{m2} \frac{M_{x,z}}{A_{f,zk} h_{zk}^2} = 0 \to \frac{1}{2A_{f,zk}} \left(\frac{h_0}{\lambda_{w0}}\right) = \frac{1}{h_{zk}}.$$

$h_{zk} \left(\dfrac{h_0}{\lambda_{w0}}\right) = 2A_{f,zk}.$	(25)

Необхідні умови оптимальності ідеального двотавра для будь якого перерізу по довжині сталевої балки тотожні необхідним умовам (22) і для інших двотаврів за витратами сталі.

Висновок. За рахунок зміни перерізу полиці і стінки є можливість досягти рівноміцності балок змінного перерізу на певній довжині. Остаточний результат раціональної форми балки виконують з використанням методики [5]. Для отримання конструкції балки з підвищеними економічними властивості необхідно вирішити задачу із змінною товщиною стінки.

Література:

1. Bazhenov V.A. Budivelna mekhanika i teoriia sporud. Narysy z istorii (Construction mechanics and the theory of structures. Essays on history) / V.A. Bazhenov, Yu.V. Vorona, A.V. Perelmuter. – K.: Karavela, 2016. – 428 p. https://scadsoft.com/download/History.pdf.

2. Білик А.С. Визначення оптимальних конструктивних рішень ферм у експертній системі одностадійного оптимального проектування / Зб. наук.праць УНДПІСК

ім. В.М.Шимановського. – Київ, вид-во «Сталь», 2009, вип. 4. – С.119-132. http://nbuv.gov.ua/UJRN/ZNPISK_2009_4_16http://nbuv.gov.ua/UJRN/ZNPISK_2009_4_16 .

3. Білик, А. ., & Терновий, М. . (2024). Вибір раціональної висоти сталевих балкових конструкцій з урахуванням коефіцієнта динамічності під час дії епізодичного навантаження. Будівельні конструкції. Теорія і практика, (15), 75–85. https://doi.org/10.32347/2522-4182.15.2024.75-85

4. Бейко І.В., Зінько П.М., Наконечний О.Г. Задачі, методи і алгоритми оптимізації: Навчальний посібник - Рівне: НУВГП, 2011. – 644 с. https://ep3.nuwm.edu.ua/2017/1/715823%20zah.pdf

5. Білик С.І. Раціональні сталеві каркаси малоенергоємких будівель із двотаврів змінного перерізу : автореф. дис. … д-ра техн. наук : 05.23.01. Київ, 2008. 33 с.

6. Білик С.І., Шимановський О.В., Нілов О.О., Володимирський В.О. Металеві конструкції: Том 1. Конструкції металевих каркасів промислових будівель: Підручник для вищих навчальних закладів. /Білик С.І., Шимановський О.В., Нілов О.О., Володимирський В.О./ Кам'янець –Подільский: ТОВ «Друкарня «Рута»- 2023.-448 с. ISBN978-617-7887-94-1

7. Білик С.І. Методика визначення оптимальної висоти сталевої двотаврової балки зі змінним перерізом стінки при розвитку обмежених пластичних деформацій / Зб. наук. праць Українського інституту сталевих конструкцій ім. В.М. Шимановського. К., Сталь, 2012. Вип.9. С.28-33 https://www.urdisc.com.ua/rl/info/9'2012.pdf

8. Білик С.І., Недоходюк І.Д. Раціональні сталеві елементи рам двотаврового перерізу зі змінною висотою стінки / Зб. наук. праць Українського інституту сталевих конструкцій ім. В.М. Шимановського. К., Сталь, 2009. Вип.4. С.133-142. https://www.urdisc.com.ua/rl/info/4'2009.pdf

9. Білик С.І., Айед Альтайе Н., Лавріненко Л.І. Конструктивні коефіцієнти та раціональна висота сталевої коробчастої балки постійного перерізу / Будівельне виробництво: Відомчий науково-технічний збірник (технічні науки). К., ДП НДІБВ. 2017. № 62/1. С.33-38

10. Ватуля Г.Л. Розрахунок і проектування комбінованих та сталебетонних конструкцій: автореф. дис. … д-ра техн. наук : 05.23.01. Харків, 2015. 44 с.

11. Гоголь М.В. Регулювання напружено-деформованого стану комбінованих сталевих конструкцій : дис. … д-ра техн. наук : 05.23.01. Полтава, 2019. 524 с.

12. Гордеєв В.М. Елементарні задачі оптимізації двотавра / Зб. наук. праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського. К., Сталь, 2009. Вип.3. С.27-48

13. Лавріненко Л., Олійник, Д. (2020). Області оптимальних параметрів сталевих гофрованих балок. Будівельні конструкції. Теорія і практика, (7), С.45–56. https://doi.org/10.32347/2522-4182.7.2020.45-56

14. Лапенко А.И. Голоднов А.И, Фоміна И.П. Подбор оптимальных по расходу стали сечений сварных двутавровых балок/ Збірник наукових праць Українського державного університету залізничного транспорту/ Том 2, № 151, 2015. С.135-140. https://doi.org/10.18664/1994-7852.151.2015.69134

15. Пермяков В.А., Перельмутер А.В., Юрченко В.В. Оптимальне проектування сталевих стержневих конструкцій. К., Сталь, 2008. - 538 с.

16. Рекомендації з проектування раціональних металевих несучих конструкцій перекриттів та покриттів / Укл.: В. О. Пермяков, М. В. Гоголь. – Львів: Вид-во НУ «Львівська політехніка», 2006.

17. Семко О.В., Воскобійник О.П. Керування ризиками при проектуванні та експлуатації сталезалізобетонних конструкцій: монографія. Полтава: ПолтНТУ, 2012. 514 с.

18. Paola Bertolini, Martin A. Eder Luca Taglialegne Paolo Sebastiano ValvoStresses in constant tapered beams with thin-walled rectangular and circular cross sections Thin-Walled Structures. Volume 137, April 2019, Pages 527-540. DOI: 10.1016/j.tws.2019.01.008

19. Bilyk A.S. Modern methods of progressive collapse simulation of building and structures/A.S. Bilyk, A.I. Kovalenko// Construction, materials science, mechanical engineering. PGASA. Dnipropetrovsk. - 87/2016 – P. 35-43,. http://smm.pgasa.dp.ua/article/view/72349.

20. Barabash M.S., Kostyra N.O., Pysarevskiy B.Y. Strength-strain state of the structures with consideration of the technical condition and changes in intensity of seismic loads IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. No 708. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/ 1757-899X/708/1/012044

21. Bilyk, S., Bilyk, A., Tonkacheiev, V. (2022). The stability of low-pitched vonMisestrusses with horizontal elastic supports. Strength of Materials and Theory of Structures, 108, 131–144. https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.108.131-144

22. Bilyk, S., Tonkacheiev, H., Bilyk, A., Tonkacheiev, V. (2020). Tallvon-Misestrusses' skew-symmetric deformation. Strength of Materialsand Theory of Structures, 105, 114–126. https://doi.org/10.32347/2410-2547.2020.105.114-126

23. S. Bilyk, O. Bashynska, O. Bashynskyi. Determination of changes inthermal stress state of steel beams in LIRA-SAPR software // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2022. – № 108. – P. 182-202. Doi:10.32347/2410-2547.2022.108.189- 202.

24. Grebenyuk G.I., Veshkin M.S. Logical design of numerical calculation and optimization of bar systems under dynamic loads /Вестник ТГАСУ № 4, 2014// p.p. 106-116. https://cyberleninka.ru/article/n/razrabotka-algoritmov-chislennogo-raschyota-i-optimizatsii-sterzhnevyh-sistem-pri-deystvii-impulsnyh-nagruzok/viewer

25. Guljaev V.I., Bazhenov V.A., Koshkin V.L. Optimization techniques in structural mechanics (Optimization methods in structural mechanic). – Kyiv, 1988. – 192 p. (rus)

26. Haug E.J., Arora J.S. Applied optimal design: mechanical and structural systems. – John Wiley & Sons, 1979. – 520 p. https://www.researchgate.net/profile/Edward-Haug-2/publication/327630206_Applied_Optimal_Design/links/5b9a68e145851574f7c3d08a/Applied-Optimal-Design.pdf

27. Daurov M.K., Bilyk A.S. Providing of the vitality of steel frames of high-rise buildings under action of fire // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technicalcollectedarticles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 102. – P. 62-68. http://opir.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-102/09-102.pdf.

28. Hohol M., Marushchak U., Peleshko I., Sydorak D. (2022) Rationalization of the Topology of Steel Combined Truss. In: Bieliatynskyi A., Breskich V. (eds) Safety in Aviation and Space Technologies. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85057-9_9.

29. Tej Kumar, Krishnan Suresh. A density-and-strain-based K-clustering approach to microstructural topology optimization /Structural and Multidisciplinary Optimization/ April 2020, Vol.61(№4): p.1399–1415. DOI:10.1007/s00158-019-02422-4

30. Lizunov P.P., Pogorelova O.S., Postnikova T.G. Selection of the optimal design for a vibro-impact nonlinear energy sink//Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected21,22, articles. – K.: KNUBA. 2023. – Issue111. – P. 13-24. DOI: 10.32347/2410-2547.2023.111.13-24

31. Leonid S. Lyakhovich, Pavel A. Akimov, Boris A. Tukhfatullin Assessment criteria of optimal solutions for creation of rods with piecewise constant cross-sections with stability constraints or constraints for value of the first natural frequency part 2: numerical examples. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 15(4). (2019) - p.p.101-110. DOI:10.22337/2587-9618-2019-15-4-101-110

32. Mela, K., Heinisuo, M. Weight and cost optimization of welded high strength steel beams. Engineering Structures. 2014. No. 79. Pp. 354–364. https://www.academia.edu/116219844/Weight_and_cost_optimization_of_welded_high_strength_steel_beams

33. McKinstray, R., Lim, J. B. P., Tanyimboh, T.T., Phan, D. ., & Sha, W. (2016). Comparison of optimal designs of steel portal frames including topological asymmetry considering rolled, fabricated and tapered sections. Engineering Structures, 111, 505–524. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.12.028

34. Nuzhnyj, V., & Bilyk, S. (2024). Revealing the influence of wind vortex shedding on the stressed-strained state of steel tower structures with solid cross-section. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 3(1 (129), 69–79. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.306181

35. Nguyen, T-T., Lee, J., Optimal design of thin-walled functionally graded beams for buckling problems, Composite Structures (2017), doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.07.024

36. Perel'muter A.V. Synthesis problems in the theory of structures (brief historical review) https://cyberleninka.ru/article/n/zadachi-sinteza-v-teorii-sooruzheniy-kratkiy-istoricheskiy-obzor (rus).

37. Shugaylo, O., Bilyk, S. (2023). Development of Safety Assessment Methods for Steel Support Structures of Nuclear Power Plant Equipment and Piping under Seismic Loads. Nuclear and Radiation Safety, 1 (97), 20–29. https://doi.org/10.32918/nrs.2023.1(97).03

38. Sudeok Shon, Sengwook Jin, Seungjae Lee Minimum Weight Design of Sinusoidal Corrugated Web Beam Using Real-Coded Genetic Algorithms. Mathematical Problems in Engineering. Vol. 2017, Article ID 9184292. 2017. 13 p.p. doi.org /10.1155/2017/ 9184292

39. V. Volkova. Dynamic Smoothing Effect in Non-Linear Dynamic System under Polyharmonic External Excitation. In Materials Science Forum (Vol. 968, pp. 421–426). 2019. Trans Tech Publications, Ltd. URL: https://doi.org/10.4028/ ww.scientific.net/msf.968.421.

40. Yurchenko V.V., Peleshko I.D. Searching for optimal prestressing of steel bar structures based on sensitivity analysisfile/ Archives of Civil Engineering Vol LXVI, ISSUE 3, 2020, p.525-540

41. Yang, Y.; Yau, J. Stability of Beams with Tapered I-Sections. J. Eng. Mech. 1987, 113, 1337–1357. Journal of Engineering Mechanics 113(9)DOI:10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:9(1337)

42. Z. Vrcelj, M.A. Bradford, Elastic distortional buckling of continuously restrained I-section beam columns, J. Constr. Steel Res. 62 (2006) 223–230. doi:10.1016/j.jcsr.2005.07.014.

Ph.D., Associate Professor **Bilyk Arte**m,
Dganov Lubomur, Ternovyy Maksim,
Kyiv National University of Construction and Architecture

DETERMINATION OF THE OPTIMAL HEIGHT OF STEEL I-BEAMS OF VARIABLE CROSS-SECTION USING THE METHOD OF LAGRANGE MULTIPLIERS.

Analytical studies of the selection of the optimal height of steel beams with variable height of the web and flange along the length of the structure are carried out.

The studies are carried out using the Lagrange multiplier method taking into account the Kuhn-Tucker conditions to determine sufficient conditions for finding the saddle point. The problem is formulated as a problem of nonlinear mathematical programming. It is assumed that the wall thickness is constant along the beam length. Analytical formulas are obtained for determining the rational height of the beam in the current section according to strength conditions. Analytical relationships between the area and the wall are obtained for forming the optimal section and the general shape of the beam structure. An example of finding the rational shape of a cantilever steel beam with a variable flange width and a variable wall height, which is loaded at the free end with a concentrated force, is given. An example of using the method to find the optimal height of a beam of constant cross section is given. It is confirmed that sufficient conditions for the optimality of an I-beam are the equality of the flange area and the wall area. This result coincides with the studies of other authors, which indicates the reliability of the obtained analytical studies. Similar studies were also conducted for ideal I-beams with constant and variable section heights. Which is important for studies of the optimal height of beams with a corrugated web and studies of through structures. The results of the studies are used in variant design and as initial data when using other optimal design methods.

Keywords: modeling, metal structures, steel I-beams of variable cross-section, minimum mass, optimum height of I-beam, Kuhn-Tucker conditions, Lagrange multiplier method, the of ideal I-beam.

REFERENCES

1. Bazhenov V.A. Budivelna mekhanika i teoriia sporud. Narysy z istorii (Construction mechanics and the theory of structures. Essays on history) / V.A. Bazhenov, Yu.V. Vorona, A.V. Perelmuter. – K.: Karavela, 2016. – 428 p. https://scadsoft.com/download/History.pdf. {in English}

2. Bilyk A.S. Vyznachennya optymal′nykh konstruktyvnykh rishen′ ferm u ekspertniy systemi odnostadiynoho optymal′noho proektuvannya / Zb. nauk.prats′ UNDPISK im. V.M.Shymanovs′koho. – Kyyiv, vyd-vo «Stal′», 2009, vyp. 4. – S.119-1323. {in Ukrainian}. http://nbuv.gov.ua/UJRN/ZNPISK_2009_4_16http://nbuv.gov.ua/UJRN/ZNPISK_2009_4_16 .

3. Bilyk, A., & Ternovyy, M. (2024). Vybir ratsional′noyi vysoty stalevykh balkovykh konstruktsiy z urakhuvannyam koefitsiyenta dynamichnosti pid chas diyi epizodychnoho navantazhennya. Budivel′ni konstruktsiyi. Teoriya i praktyka, (15), 75–85. https://doi.org/10.32347/2522-4182.15.2024.75-85 3. {in Ukrainian}.

4. Beyko I.V., Zin′ko P.M., Nakonechnyy O.H. Zadachi, metody i alhorytmy optymizatsiyi: Navchal′nyy posibnyk - Rivne: NUVHP, 2011. – 644 s. https://ep3.nuwm.edu.ua/2017/1/715823%20zah.pdf. 3 {in Ukrainian}.

5. Bilyk S.I. Ratsional′ni stalevi karkasy maloenerhoyemkykh budivel′ iz dvotavriv zminnoho pererizu : avtoref. dys. … d-ra tekhn. nauk : 05.23.01. Kyyiv, 2008. 33 s. 3 {in Ukrainian}.

6. Bilyk S.I., Shymanovs′kyy O.V., Nilov O.O., Volodymyrs′kyy V.O. Metalevi konstruktsiyi: Tom 1. Konstruktsiyi metalevykh karkasiv promyslovykh budivel′: Pidruchnyk dlya vyshchykh navchal′nykh zakladiv. /Bilyk S.I., Shymanovs′kyy O.V., Nilov O.O., Volodymyrs′kyy V.O./ Kam″yanets′ –Podil′skyy: TOV «Drukarnya «Ruta»- 2023.-448 c. ISBN978-617-7887-94-13 {in Ukrainian}.

7. Bilyk S.I. Metodyka vyznachennya optymal′noyi vysoty stalevoyi dvotavrovoyi balky zi zminnym pererizom stinky pry rozvytku obmezhenykh plastychnykh deformatsiy / Zb. nauk. prats′ Ukrayins′koho instytutu stalevykh konstruktsiy im. V.M. Shymanovs′koho. K., Stal′, 2012. Vyp.9. S.28-33 https://www.urdisc.com.ua/rl/info/9'2012.pdf. 3 {in Ukrainian}

8. Bilyk S.I., Nedokhodyuk I.D. Ratsional′ni stalevi elementy ram dvotavrovoho pererizu zi zminnoyu vysotoyu stinky / Zb. nauk. prats′ Ukrayins′koho instytutu stalevykh konstruktsiy im. V.M. Shymanovs′koho. K., Stal′, 2009. Vyp.4. C.133-142. https://www.urdisc.com.ua/rl/info/4'2009.pdf. 3 {in Ukrainian}

9. Bilyk S.I., Ayed Al′taye N., Lavrinenko L.I. Konstruktyvni koefitsiyenty ta ratsional′na vysota stalevoyi korobchastoyi balky postiynoho pererizu / Budivel′ne vyrobnytstvo: Vidomchyy naukovo-tekhnichnyy zbirnyk (tekhnichni nauky). K., DP NDIBV. 2017. № 62/1. S.33-38. 3. {in Ukrainian}.

10. Vatulya H.L. Rozrakhunok i proektuvannya kombinovanykh ta stalebetonnykh konstruktsiy : avtoref. dys. … d-ra tekhn. nauk : 05.23.01. Kharkiv, 2015. 44 s.

11. Hohol′ M.V. Rehulyuvannya napruzheno-deformovanoho stanu kombinovanykh stalevykh konstruktsiy : dys. … d-ra tekhn. nauk : 05.23.01. Poltava, 2019. 524 s. 3 {in Ukrainian}.

12. Hordeyev V.M. Elementarni zadachi optymizatsiyi dvotavra / Zb. nauk. prats′ Ukrayins′koho naukovo-doslidnoho ta proektnoho instytutu stalevykh konstruktsiy imeni V.M. Shymanovs′koho. K., Stal′, 2009. Vyp.3. S.27-48. {in Ukrainian}.

13. Lavrinenko L., Oliynyk, D. (2020). Oblasti optymal′nykh parametriv stalevykh hofrovanykh balok. Budivel′ni konstruktsiyi. Teoriya i praktyka, (7), C.45–56. https://doi.org/10.32347/2522-4182.7.2020.45-56. {in Ukrainian}.

14. Lapenko A.Y. Holodnov A.Y, Fomina Y.P. Podbor optymal′nykh po raskhodu staly sechenyy svarnykh dvutavrovykh balok/ Zbirnyk naukovykh prats′

Ukrayins′koho derzhavnoho universytetu zaliznychnoho transportu/ Том 2, № 151, 2015. S.135-140. https://doi.org/10.18664/1994-7852.151.2015.69134. {in Ukrainian}.

15. Permyakov V.A., Perel′muter A.V., Yurchenko V.V. Optymal′ne proektuvannya stalevykh sterzhnevykh konstruktsiy. K., Stal′, 2008. - 538 s. { rus }.

16. Rekomendatsiyi z proektuvannya ratsional′nykh metalevykh nesuchykh konstruktsiy perekryttiv ta pokryttiv / Ukl.: V. O. Permyakov, M. V. Hohol′. – L′viv: Vyd-vo NU «L′vivs′ka politekhnika», 2006. {in Ukrainian}.

17. Semko O.V., Voskobiynyk O.P. Keruvannya ryzykamy pry proektuvanni ta ekspluatatsiyi stalezalizobetonnykh konstruktsiy: monohrafiya. Poltava: PoltNTU, 2012. 514. {in Ukrainian}.

18. Paola Bertolini, Martin A. Eder Luca Taglialegne Paolo Sebastiano ValvoStresses in constant tapered beams with thin-walled rectangular and circular cross sections Thin-Walled Structures. Volume 137, April 2019, Pages 527-540. DOI: 10.1016/j.tws.2019.01.008. {in English}.

19. Bilyk A.S. Modern methods of progressive collapse simulation of building and structures/A.S. Bilyk, A.I. Kovalenko// Construction, materials science, mechanical engineering. PGASA. Dnipropetrovsk. - 87/2016 – P. 35-43,. http://smm.pgasa.dp.ua/article/view/72349. {in English}.

20. Barabash M.S., Kostyra N.O., Pysarevskiy B.Y. Strength-strain state of the structures with consideration of the technical condition and changes in intensity of seismic loads IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. No 708. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/708/1/012044. {in English}.

21. Bilyk, S., Bilyk, A., Tonkacheiev, V. (2022). The stability of low-pitched vonMisestrusses with horizontal elastic supports. Strength of Materials and Theory of Structures, 108, 131–144. https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.108.131-144. {in English}.

22. Bilyk, S., Tonkacheiev, H., Bilyk, A., Tonkacheiev, V. (2020). Tallvon-Misestrusses’ skew-symmetric deformation. Strength of Materialsand Theory of Structures, 105, 114–126. https://doi.org/10.32347/2410-2547.2020.105.114-126. {in English}.

23. S. Bilyk, O. Bashynska, O. Bashynskyi. Determination of changes inthermal stress state of steel beams in LIRA-SAPR software // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2022. – № 108. – P. 182-202. Doi:10.32347/2410-2547.2022.108.189- 202. {in English}.

24. Grebenyuk G.I., Veshkin M.S. Logical design of numerical calculation and optimization of bar systems under dynamic loads /Вестник ТГАСУ № 4, 2014// p.p. 106-116. https://cyberleninka.ru/article/n/razrabotka-algoritmov-chislennogo-

raschyota-i-optimizatsii-sterzhnevyh-sistem-pri-deystvii-impulsnyh-nagruzok/viewer. {in English}.

Guljaev V.I., Bazhenov VA., Koshkin V.L. Optimization techniques in structural mechanics (Optimization methods in structural mechanic). – Kyiv, 1988. – 192 p. {in Russian}

25. Haug E.J., Arora J.S. Applied optimal design: mechanical and structural systems. – John Wiley & Sons, 1979. – 520 p. https://www.researchgate.net/profile/Edward-Haug-2/publication/327630206_Applied_Optimal_Design/links/5b9a68e145851574f7c3d08a/Applied-Optimal-Design.pdf. {in English}.

26. Daurov M.K., Bilyk A.S. Providing of the vitality of steel frames of high-rise buildings under action of fire // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technicalcollectedarticles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 102. – P. 62-68. http://opir.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-102/09-102.pdf. {in English}.

27. Hohol M., Marushchak U., Peleshko I., Sydorak D. (2022) Rationalization of the Topology of Steel Combined Truss. In: Bieliatynskyi A., Breskich V. (eds) Safety in Aviation and Space Technologies. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85057-9_9. {in English}.

28. Tej Kumar, Krishnan Suresh. A density-and-strain-based K-clustering approach to microstructural topology optimization /Structural and Multidisciplinary Optimization/ April 2020, Vol.61(№4): p.1399–1415. DOI:10.1007/s00158-019-02422-4. {in English}.

29. Lizunov P.P., Pogorelova O.S., Postnikova T.G. Selection of the optimal design for a vibro-impact nonlinear energy sink//Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected21,22, articles. – K.: KNUBA. 2023. – Issue111. – P. 13-24. DOI: 10.32347/2410-2547.2023.111.13-24. {in English}.

30. Leonid S. Lyakhovich, Pavel A. Akimov, Boris A. Tukhfatullin Assessment criteria of optimal solutions for creation of rods with piecewise constant cross-sections with stability constraints or constraints for value of the first natural frequency part 2: numerical examples. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 15(4). (2019) - p.p.101-110. DOI:10.22337/2587-9618-2019-15-4-101-110. {in English}.

31. Mela, K., Heinisuo, M. Weight and cost optimization of welded high strength steel beams. Engineering Structures. 2014. No. 79. Pp. 354–364. https://www.academia.edu/116219844/Weight_and_cost_optimization_of_welded_high_strength_steel_beams. {in English}.

32. McKinstray, R., Lim, J.B.P., Tanyimboh, T.T., Phan, D.T., & Sha, W. (2016). Comparison of optimal designs of steel portal frames including topological

asymmetry considering rolled, fabricated and tapered sections. Engineering Structures, 111, 505–524. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.12.028. {in English}.

33. Nuzhnyj, V., & Bilyk, S. (2024). Revealing the influence of wind vortex shedding on the stressed-strained state of steel tower structures with solid cross-section. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 3(1 (129), 69–79. https://doi.org/10.15587/1729- 4061.2024.306181. {in English}.

34. Nguyen, T-T., Lee, J., Optimal design of thin-walled functionally graded beams for buckling problems, Composite Structures (2017), doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.07.024. {in English}.

35. Perel'muter A.V. Synthesis problems in the theory of structures (brief historical review) https://cyberleninka.ru/article/n/zadachi-sinteza-v-teorii-sooruzheniy-kratkiy-istoricheskiy-obzor (rus). {in English}.

36. Shugaylo, O., Bilyk, S. (2023). Development of Safety Assessment Methods for Steel Support Structures of Nuclear Power Plant Equipment and Piping under Seismic Loads. Nuclear and Radiation Safety, 1 (97), 20–29. https://doi.org/10.32918/nrs.2023.1(97).03. {in English}.

37. Sudeok Shon, Sengwook Jin, Seungjae Lee Minimum Weight Design of Sinusoidal Corrugated Web Beam Using Real-Coded Genetic Algorithms. Mathematical Problems in Engineering. Vol. 2017, Article ID 9184292. 2017. 13 p.p. doi.org /10.1155/2017/ 9184292. {in English}.

38. V. Volkova. Dynamic Smoothing Effect in Non-Linear Dynamic System under Polyharmonic External Excitation. In Materials Science Forum (Vol. 968, pp. 421–426). 2019. Trans Tech Publications, Ltd. URL: https://doi.org/10.4028/ ww.scientific.net/msf.968.421. {in English}.

39. Yurchenko V.V., Peleshko I.D.. Searching for optimal prestressing of steel bar structures based on sensitivity analysisfile/ Archives of Civil Engineering Vol LXVI, ISSUE 3, 2020, p.525-540. {in English}.

40. Yang, Y.; Yau, J. Stability of Beams with Tapered I-Sections. J. Eng. Mech. 1987, 113, 1337–1357. Journal of Engineering Mechanics 113(9)DOI:10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:9(1337). {in English}.

41. Z. Vrcelj, M.A. Bradford, Elastic distortional buckling of continuously restrained I-section beam columns, J. Constr. Steel Res. 62 (2006) 223–230. doi:10.1016/j.jcsr.2005.07.014. {in English}.