

DOI: 10.32347/2786-7269.2024.10.301-317

УДК 621.01

к.т.н., доцент **Задорожний А.О.**,

zsnj1971@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1031-0585,

НУ “Харківський політехнічний інститут”,

к.т.н., доцент **Човнюк Ю.В.**,

ychovnyuk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-0608-0203,

доцент **Чередніченко П.П.**,

petro_che@ukr.net, ORCID: 0000-0001-7161-661X,

к.т.н., доцент **Остапущенко О.П.**,

olga_ost_17@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8114-349X,

Кравченко І.М., kim-ua@i.ua, ORCID: 0000-0001-7077-1546,

Київський Національний університет будівництва і архітектури

**АНАЛІЗ ТА СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ РЕЖИМІВ РУХУ
ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МЕХАНІЗМІВ ГУСЕНИЧНИХ МАШИН.
Частина III. ВПЛИВ РЕЖИМІВ ПУСКУ НА ДИНАМІЧНІ
НАВАНТАЖЕННЯ ПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ (КАНАТІВ) МЕХАНІЗМУ
ПІДЙОМУ**

(Продовження. Частина II опублікована в попередньому випуску)

Встановлені основні динамічні та кінематичні характеристики оптимальних режимів пуску вантажопідйомних механізмів гусеничних машин, засновані на мінімізації протягом перехідного режиму пришвидшень другого, третього та четвертого порядку. Фізичний зміст вказаних критеріїв зводиться до оптимізації (мінімізації) питомої (на одиницю маси вантажу) сили інерції та її похідних по часу (першого та другого порядків). Крім того, розв'язки відповідних рівнянь Ейлера-Пуассона (четвертого, шостого та восьмого порядків по часу t) для координати руху вантажу розшукуються у класі сплайн-функцій по часу третього, п'ятого та сьомого порядків, а коефіцієнти (невідомі) вказаних сплайн-функцій знаходяться з відповідних фізично обґрунтованих умов (т.з. термінальних). Розглянутий також режим пуску, заснований на задоволенні умов гладкості руху для закону зміни у часі швидкості руху та прискорення цього руху. Використання останнього дозволяє встановити аналітичний взаємозв'язок між початковим прискоренням створюваного руху та швидкістю цього руху після моменту закінчення процесу пуску й виходу системи «вантаж-канат-привод» на ustalений режим руху з постійною швидкістю.

Ключові слова: аналіз; синтез; оптимізація; режими руху; пуск; вантажопідйомні механізми гусеничних машин; сплайн-функції по часу; критерії якості руху; гладкість; пришвидшення високого порядку.

Постановка проблеми. Стадія пуску механізму підйому вантажу гусеничної машини характеризується зростанням швидкості руху ланки, зокрема, приводу, від нульового значення до певної величини під дією сукупності силових факторів. Тут можна використати різні режими руху, які мінімізують питомі (на одиницю маси вантажу) інерційні навантаження, швидкість їх зміни у часі (різкість) та прискорення їх зміни у часі (друга похідна по часу від питомого інерційного навантаження), виникаючі у канатній системі механізму підйому вантажу коливання, або задовольняють певним умовам гладкості руху щодо його швидкості та прискорення.

Аналіз публікацій по темі дослідження. Для усунення недоліків чисельних розрахунків для наведених вище задач варіаційного числення автори [1-13] зазвичай використовують прямі варіаційні методи. Проте для визначення невідомих коефіцієнтів, які входять до складу функцій, що є розв'язками диференціальних рівнянь, й детермінуються з відповідних термінальних умов, використовуються фізично необгрунтовані крайові умови, в котрих відсутня фізична причина, що викликала цей рух (сили, рівнодіючі сили, моменти сил тощо). На думку авторів даного дослідження, при оптимізації режимів пуску механізмів підйому вантажу гусеничних машин обов'язково повинен бути присутнім у всіх характеристиках/параметрах цього руху силовий фактор (або ж прискорення).

Саме ці недоліки методу, запропонованого у [13], усунуті у даному дослідженні, яке базується на інших підходах до розв'язку подібних варіаційних задач.

Мета роботи полягає у обгрунтуванні нового підходу, заснованого на визначенні параметрів сплайн-функцій по часу (t), який дозволяє оптимізувати процес пуску механізму підйому вантажу гусеничних машин. Такий аналітичний підхід заснований, крім методів класичного варіаційного числення, рівнянь Ейлера-Пуассона, на використанні критеріїв якості руху, що мінімізують питому інерційну силу (та її похідні до другого порядку по часу включно) або враховують умови гладкості такого руху на стадії пуску, реалізовані для законів зміни у часі швидкості та прискорення.

Виклад основного змісту дослідження.

Розглянемо вплив різних режимів пуску на динамічні навантаження, які виникають в одному з пружних елементів механізму підйому, а саме, у канатній системі. Для цього у першому наближенні використаємо двомасову динамічну

модель механізму підйому гусеничних машин (рис.1). На цьому рисунку прийняті такі позначення: m, m_1 – зведені до підйомного каната маси відповідно вантажу й приводного механізму з барабаном; x, x_1 – узагальнені координати відповідно мас m й m_1 ; F_1 та F_2 – рушійна сила приводу й вага вантажу ($F_2 = mg$, g – прискорення вільного падіння), зведені до вантажного каната; c – жорсткість каната.

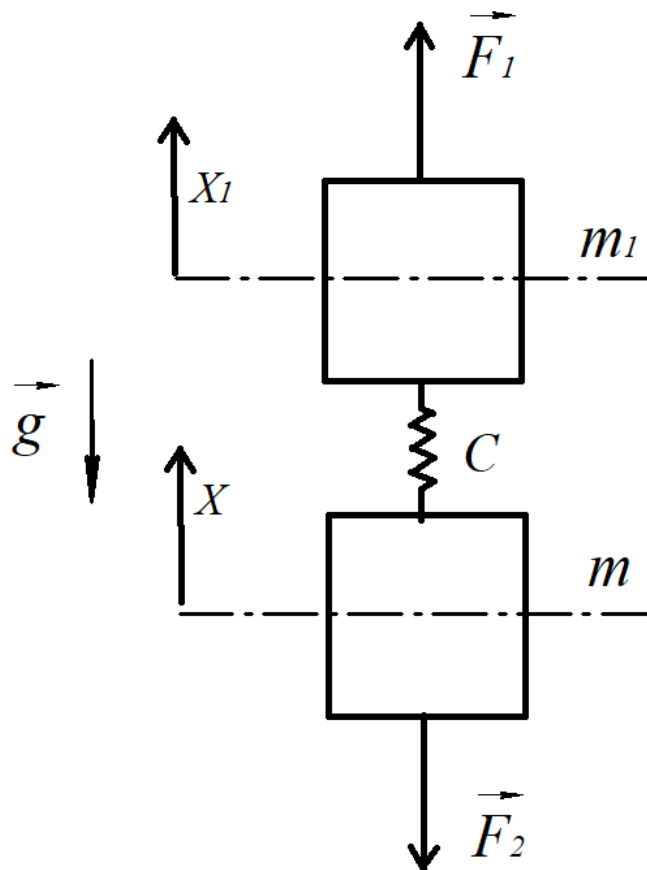


Рис.1. Двомасова динамічна модель механізму підйому вантажу гусеничної машини

Рівняння руху розглянутої моделі механізму підйому вантажу мають вигляд:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{x}_1 = F_1 - c \cdot (x_1 - x); \\ m \cdot \ddot{x} = c \cdot (x_1 - x) - F_2. \end{cases} \quad (1)$$

Зведемо систему диференціальних рівнянь другого порядку (1) до одного рівняння четвертого порядку:

$$x^{(IV)} + k^2 \cdot \ddot{x} = k_2^2 \cdot a(t) - k_1^2 \cdot g, \quad k_1^2 = \frac{c}{m_1}, \quad k_2^2 = \frac{c}{m}, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2. \quad (2)$$

Тут, у (2), $k = \left\{ \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m_1} \right) \cdot c \right\}^{1/2}$ – частота власних коливань розглянутої динамічної моделі механізму підйому вантажу; $a = a(t)$ – функція пришвидшення цього або іншого режиму руху приводного механізму, яка залежить від часу t .

Слід зазначити, що у роботі [3] отримане аналогічне рівняння (2), але допущені помилки, які у даному дослідженні виправлені.

Якщо ввести нову змінну: $\xi = x_1 - x$, тоді систему (1) можна звести до одного рівняння для $\xi(t)$ другого порядку:

$$\ddot{\xi}(t) + k^2 \cdot \xi = \frac{F_1(t)}{m_1} + g; \Leftrightarrow \ddot{\xi} + k^2 \cdot \xi = a(t) + g. \quad (3)$$

Розв'язок рівняння (3) розшукуємо у наступній формі:

$$\xi(t) = \tilde{\xi}(t) + \frac{g}{k^2}, \quad \left(\ddot{\tilde{\xi}} \right) + k^2 \cdot \tilde{\xi} = a(t). \quad (4)$$

У другій частині дослідження (II) були встановлені наступні рівняння, які оптимізують режими пуску механізмів підйому вантажів гусеничних машин для $x(t)$ – координати руху вантажу:

$$1) x^{(IV)} = 0 \Leftrightarrow \ddot{a}(t) = 0; \Leftrightarrow a(0) + \dot{a}(0)t = a(t); \quad (5)$$

$$2) x^{(VI)} = 0 \Leftrightarrow a^{(IV)}(t) = 0; \Leftrightarrow a(0) + \dot{a}(0)t + \ddot{a}(0) \cdot t^2/2 + \ddot{a}(0) \cdot t^3/6 = a(t); \quad (6)$$

$$3) x^{(VIII)} = 0 \Leftrightarrow a^{(VI)}(t) = 0; \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a(t) = a(0) + \dot{a}(0)t + \ddot{a}(0) \cdot t^2/2 + \ddot{a}(0) \cdot t^3/6 + \\ + a^{(IV)}(0) \cdot t^4/24 + a^{(V)}(0) \cdot t^5/120, \quad (7)$$

де: $a(0)$ – прискорення вантажу у початковий момент руху вантажу, тобто у $t = 0$. При наявності залежності $a(t)$, коефіцієнти у (5), (6), (7) легко знайти.

Можна знайти значення коефіцієнтів при t у формулах (5) – (7), виходячи з інших термінальних умов руху вантажу на канаті механізму підйому (вантаж) гусеничної машини.

Зокрема, для залежності (5) маємо:

$$a(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t \Leftrightarrow a|_{t=0} = a(0); a|_{t=\tau_n} = 0, \quad (8)$$

де: τ_n – тривалість процесу пуску, тоді для $a(t)$ замість (5) маємо:

$$\alpha_0 = a(0); \alpha_1 = -\frac{a(0)}{\tau_n}. \quad (9)$$

Тому маємо наступний закон зміни у часі $a(t)$ для (5) режиму пуску:

$$a(t) = a(0) \cdot \left(1 - \frac{t}{\tau_n}\right). \quad (10)$$

Для $a(t)$ у (6) маємо:

$$a(t) = a(0) \cdot \left\{1 - \frac{3t}{\tau_n} + \frac{3t^2}{\tau_n^2} - \frac{t^3}{\tau_n^3}\right\} = a(0) \cdot \left\{1 - \frac{t}{\tau_n}\right\}^3. \quad (11)$$

Залежність (11) отримана за наступних термінальних умов:

$$a|_{t=0} = a(0); \quad a|_{t=\tau_n} = 0; \quad \dot{a}|_{t=\tau_n} = 0; \quad a|_{t=\tau_n} = 0. \quad (12)$$

Для $a(t)$ у 7 маємо:

$$a(t) = a(0) \cdot \left\{1 - \frac{t}{\tau_n}\right\}^5. \quad (13)$$

Залежність (13) отримана за наступних термінальних умов:

$$a|_{t=0} = a(0); \quad a|_{t=\tau_n} = \dot{a}|_{t=\tau_n} = \ddot{a}|_{t=\tau_n} = \ddot{a}|_{t=\tau_n} = a^{(IV)}|_{t=\tau_n} = 0. \quad (14)$$

На рис.2 зображені залежності (10), (11), (13):

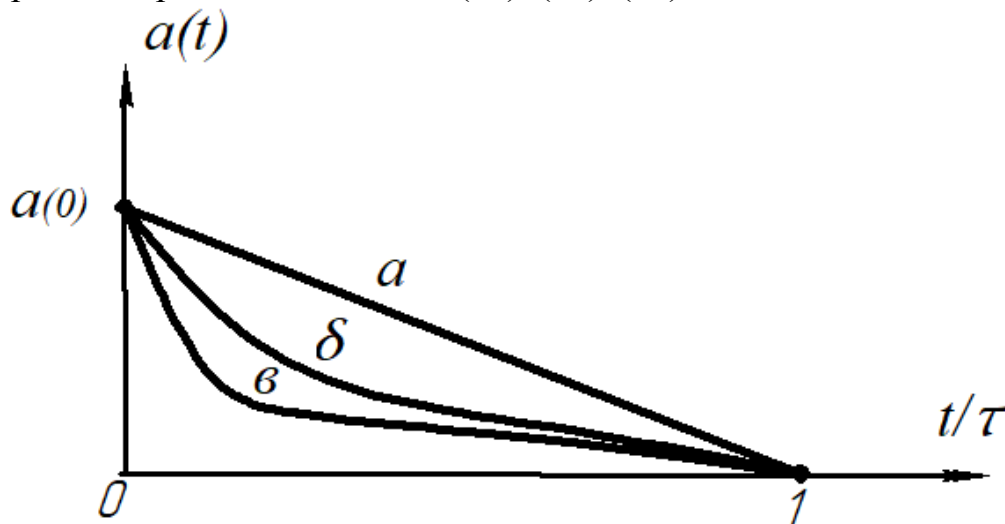


Рис.2. Залежність $a(t)$:

а) за формулою (10); б) за формулою (11); в) за формулою (13).

Аналіз коефіцієнта динамічності (K_δ), який визначаємо за формулою:

$$K_\delta(t) = \frac{c \cdot \xi(t)}{mg}, \quad (15)$$

нижче проведений для різних варіантів зміни у часі $a(t)$.

1. Почнемо цей аналіз з випадку $a(t) = a = const$ (т.з. силовий режим). При реалізації цього режиму пуску мінімізована за проміжок часу $t \in [0; \tau_n]$ величина квадрату питомої (на одиницю маси вантажу m) сили інерції, яка саме діє на цей вантаж, котрий піднімають. Зрозуміло, що з погляду на аналітичні записи

режимів пуску механізмів підйому вантажу гусеничних машин типу (10), (11), (13), даний розглядуваний режим пуску можна подати наступною залежністю:

$$a(t) = a(0) = a, \quad t \in [0; \tau_n]. \quad (16)$$

Отже, у цьому випадку рух механізму підйому вантажу гусеничною машиною описується рівнянням:

$$\ddot{\xi} + k^2 \xi = a + g. \quad (17)$$

Розв'язок (17) шукаємо за нульових початкових умов:

$$\xi|_{t=0} = \dot{\xi}|_{t=0} = 0. \quad (18)$$

Розв'язок (17) має такий вигляд (з урахуванням умов (18)):

$$\xi(t) = \frac{(a + g)}{k^2} \cdot \{1 - \cos(kt)\}. \quad (19)$$

Коефіцієнт динамічності набуває наступного вигляду:

$$K_o(t) = \frac{c(a + g)}{k^2 mg} \cdot \{1 - \cos(kt)\} = \frac{k_2^2}{k^2} \cdot \frac{(a + g)}{g} \cdot \{1 - \cos(kt)\}. \quad (20)$$

Після нескладних перетворень маємо:

$$K_o(t) = 2 \frac{k_2^2}{k^2} \cdot \frac{(a + g)}{g} \cdot \sin^2 \left\{ \frac{kt}{2} \right\}, \quad (21)$$

причому значення коефіцієнту динамічності $K_o(t)$ (21) змінюються з плином часу, приймаючи у його певні моменти t^* максимальні значення:

$$K_o^{(\max)}(t^*) = 2 \frac{k_2^2}{k^2} \cdot \frac{(a + g)}{g}. \quad (22)$$

Моменти t_j^* , $j = 1, 2, 3, \dots$, ($j \in N$), визначаються з наступних співвідношень:

$$\frac{k \cdot t_j^*}{2} = (2j - 1) \cdot \frac{\pi}{2}, \quad j \in N. \quad (23)$$

Тоді:

$$t_j^* = \frac{(2j - 1) \cdot \pi}{k}, \quad j \in N. \quad (24)$$

Якщо $0 < t_j^* \leq \tau_n$, тоді $K_{\text{дин}}(t) \equiv K_o(t)$ протягом проміжку часу $t \in [0; \tau_n]$ набуває подвійного значення по амплітуді $2 \cdot \left\{ \frac{k_2^2}{k^2} \cdot \frac{(a + g)}{g} \right\}$, що може привести

до перевантаження канатної системи і, як наслідок, до можливості її розриву (аварійної ситуації). Тому, вказаний режим пуску механізму підйому вантажу не можна вважати доцільним у сенсі його реалізації.

Графік залежності $K_o(t)$ наведений на рис.3. На цьому рисунку введені наступні позначення.

$$\tilde{K}_o(t) = K_o(t) / \left\{ \frac{k_2^2}{k^2} \cdot \frac{(a+g)}{g} \right\}, \quad \bar{t}_j = \frac{2j\pi}{k}, \quad j \in N. \quad (25)$$

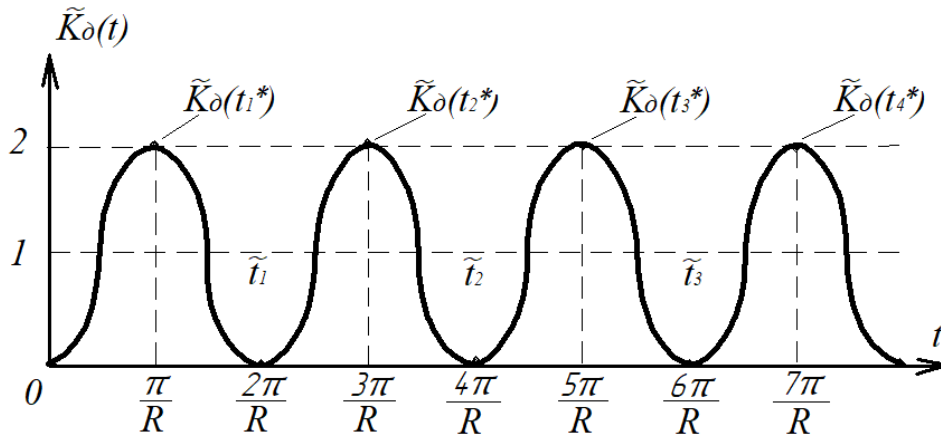


Рис.3. Залежність $\tilde{K}_o(t)$ для $K_o(t)$ за (21).

2. Динамічний режим (за пришвидженнями першого порядку). Цей режим мінімізує потужність приводу, однак він дає максимальне значення пришвидження і миттєве його зростання на початку руху, що не дозволяє використати отриманий режим, як і оптимальний силовий режим, в механізмах, яким потрібен досить плавний пуск.

Рівняння (3) має у цьому випадку наступний вигляд:

$$\ddot{\xi} + k^2 \cdot \xi = a(0) \cdot \left(1 - \frac{t}{\tau_n} \right) + g. \quad (26)$$

За початкових умов (18) розв'язок (26) можна подати наступним чином:

$$\xi(t) = \frac{a(0)}{k^3 \tau_n} \sin kt + \frac{1}{k^2} \left\{ \left[a(0) \left(1 - \frac{t}{\tau_n} \right) + g \right] \right\} - \frac{1}{k^2} \{ a(0) + g \} \cos kt = \quad (27)$$

$$= \frac{a(0)}{k^3 \tau_n} \sin kt + \frac{1}{k^2} [a(0) + g] \cdot (1 - \cos kt) - \frac{a(0)t}{k^2 \tau_n}.$$

$$K_{дин}(t) = \frac{c \cdot \left\{ \frac{a(0)}{k^3 \tau_n} \sin kt + \frac{1}{k^2} [a(0) + g] \cdot (1 - \cos kt) - \frac{a(0) \cdot t}{k^2 \tau_n} \right\}}{mg}. \quad (28)$$

Екстремальні значення $K_{дин}(t)$ (28) набуває у моменти часу, котрі можна знайти з рівняння:

$$\frac{a(0)}{k^2 \tau_n} \cos kt + \frac{1}{k} \cdot [a(0) + g] \sin kt - \frac{a(0)}{k^2 \tau_n} = 0. \quad (29)$$

Розв'язками рівняння (29) є два типи коренів:

$$\sin \frac{kt}{2} = 0; \quad \operatorname{tg} \left(\frac{kt}{2} \right) = \left\{ \frac{a(0) + g}{a(0)} \right\} \cdot k\tau_{\pi}. \quad (30)$$

Зрозуміло, що розв'язки першого з рівнянь (30) відповідають мінімуму функції $K_{\text{дин}}(t)$ (28), тоді як розв'язки другого:

$$t_j^* = \frac{2}{k} \operatorname{arctg} \left\{ \left[\frac{a(0) + g}{a(0)} \right] \cdot k\tau_{\pi} \right\} + \frac{2}{k} \cdot j\pi, \quad j \in N. \quad (31)$$

Тому максимальне значення $K_{\text{дин}}(t)|_{t=t_j^*}$ набуває вигляду:

$$K_{\text{дин}}(t)|_{t=t_j^*} = K_{\text{дин}}^{(\max)} = \frac{c}{mg} \left\{ \frac{a(0)}{k^3 \tau_{\pi}} \sin(kt_j^*) + \frac{1}{k^2} [a(0) + g] \cdot 2 \sin^2 \left(\frac{kt_j^*}{2} \right) - \frac{a(0)t_j^*}{k^2 \tau_{\pi}} \right\}. \quad (32)$$

3. Динамічний режим (за пришвидшеннями другого порядку), який можна назвати ривковим [3], забезпечує плавну зміну пришвидшення вантажу на всій ділянці пуску, що дає можливість використати його при пуску без значних коливань вантажу. Однак при оптимальному ривковому режимі на початку пуску миттєво наростає до максимального значення питома (на одиницю маси m вантажу) функція ривка [3], що не дає можливості повністю позбутись коливань.

Рівняння (3) має у цьому випадку наступний вигляд:

$$\ddot{\xi} + k^2 \cdot \xi = a(0) \cdot \left(1 - \frac{t}{\tau_{\pi}} \right)^3 + g. \quad (33)$$

За початкових умов (18) розв'язок (33) можна подати наступним чином:

$$\begin{aligned} \xi(t) = & A \sin kt + B \cos kt + \frac{1}{k^2} \cdot \left[a(0) + g - \frac{6a(0)}{k^2 \tau_{\pi}^2} \right] + \\ & + \frac{1}{k^2} \cdot \left\{ -\frac{3a(0)}{\tau_{\pi}} + \frac{6a(0)}{k^2 \tau_{\pi}^3} \right\} \cdot t + \frac{3a(0)t^2}{k^2 \tau_{\pi}^2} + \left\{ \frac{-a(0)t^3}{k^2 \tau_{\pi}^3} \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Використовуючи нульові початкові умови (18), знаходимо значення констант A та B :

$$\begin{cases} B = \frac{1}{k^2} \cdot (-1) \cdot \left[a(0) + g - \frac{6a(0)}{k^2 \tau_{\pi}^2} \right]; \\ A = \frac{1}{k^2} \cdot \left\{ \frac{3a(0)}{k\tau_{\pi}} - \frac{6a(0)}{k^3 \tau_{\pi}^3} \right\}. \end{cases} \quad (35)$$

Отже, для коефіцієнта динамічності даного режиму пуску (ривкового типу) остаточно маємо:

$$K_{\text{дин}}(t) = \frac{c}{mg} \cdot \left\{ \frac{1}{k^2} \cdot \left[\frac{3a(0)}{k\tau_n} - \frac{6a(0)}{k^3\tau_n^3} \right] \sin kt + \frac{1}{k^2} \left[\frac{6a(0)}{k^2\tau_n^2} - a(0) - g \right] \cos kt + \right. \\ \left. + \frac{1}{k^2} \cdot \left[a(0) + g - \frac{6a(0)}{k^2\tau_n^2} \right] + \frac{1}{k^2} \left\{ -\frac{3a(0)}{\tau_n} - \frac{6a(0)}{k^2\tau_n^3} \right\} t + \frac{3a(0)t^2}{k^2\tau_n^2} - \frac{a(0)t^3}{k^2\tau_n^3} \right\}. \quad (36)$$

Подано (36) у більш компактному вигляді:

$$K_{\text{дин}}(t) = \frac{c}{mg} \cdot \left\{ \frac{1}{k^2} \left[a(0) + g - \frac{6a(0)}{k^2\tau_n^2} \right] (1 - \cos kt) + \right. \\ \left. + \frac{1}{k^2} \left[\frac{6a(0)}{k^2\tau_n^3} - \frac{3a(0)}{\tau_n} \right] \left(t - \frac{1}{k} \sin kt \right) + \frac{3a(0)}{k^2\tau_n^2} \left(t^2 - \frac{t^3}{3\tau_n} \right) \right\}. \quad (37)$$

Слід зазначити, що $K_{\text{дин}}(0) = 0$ для ривкового режиму пуску механізму підйому вантажу гусеничної машини.

4. Режим пуску (за пришвидшеннями третього порядку). Цей режим пуску забезпечує плавну зміну пришвидшення і ривка вантажу на всій ділянці руху, що приводить до мінімізації коливань вантажу.

Рівняння (3) має у цьому випадку наступний вигляд:

$$\ddot{\xi} + k^2 \cdot \xi = a(0) \cdot \left(1 - \frac{t}{\tau_n} \right)^5 + g. \quad (38)$$

За початкових умов (18) розв'язок (38) можна подати наступним чином:

$$\xi(t) = \left\{ \frac{[a(0) + g]}{k^2} + \frac{20a(0)}{k^4\tau_n^2} \left(-1 + \frac{6}{k^2\tau_n^2} \right) \right\} (1 - \cos kt) + \\ + \frac{5a(0)}{k^2\tau_n} \left[-1 + \frac{12}{k^2\tau_n^2} - \frac{24}{k^4\tau_n^4} \right] \left(t - \frac{1}{k} \sin kt \right) + \frac{10a(0)}{k^2\tau_n^2} \left[1 - \frac{6}{k^2\tau_n^2} \right] t^2 + \\ + \frac{10a(0)}{k^2\tau_n^3} \left(-1 + \frac{2}{k^2\tau_n^2} \right) t^3 + \frac{5a(0)}{k^2\tau_n^4} t^4 - \frac{a(0)}{k^2\tau_n^5} t^5. \quad (39)$$

Коефіцієнт динамічності у цьому режимі пуску набирає вигляду:

$$K_{\text{дин}}(t) = \frac{c}{mg} \left\{ \left[\frac{a(0) + g}{k^2} + \frac{20a(0)}{k^4\tau_n^2} \left(-1 + \frac{6}{k^2\tau_n^2} \right) \right] (1 - \cos kt) + \right. \\ + \frac{5a(0)}{k^2\tau_n} \left(-1 + \frac{12}{k^2\tau_n^2} - \frac{24}{k^4\tau_n^4} \right) \left(t - \frac{1}{k} \sin kt \right) + \frac{10a(0)}{k^2\tau_n^2} \left(1 - \frac{6}{k^2\tau_n^2} \right) t^2 + \\ \left. + \frac{10a(0)}{k^2\tau_n^3} \left(-1 + \frac{2}{k^2\tau_n^2} \right) t^3 + \frac{5a(0)}{k^2\tau_n^4} t^4 - \frac{a(0)}{k^2\tau_n^5} t^5 \right\}. \quad (40)$$

Як і для ривкового режиму пуску механізму підйому вантажу гусеничної машини, у цьому режимі теж $K_{\text{дин}}(0) = 0$.

5. Оптимізація режимів пуску механізму підйому вантажу гусеничної машини за різних критеріїв мінімізації питомої (на одиницю маси вантажу m) сили інерції та її похідних по часу t .

Визначимо кінематичні характеристики руху вантажу механізму підйому гусеничних машин, використовуючи критерії якості вказаного руху, пов'язані з пришвидшеннями другого, третього та четвертого порядку.

5.1. Пришвидження другого порядку ($\ddot{x}(t)$). По своїй суті $\ddot{x}(t)$ є за фізичним змістом питомою (на одиницю маси вантажу) силою інерції. Критерій якості руху вантажу має вигляд:

$$I_1 = \left[\left\{ \frac{1}{\tau_n} \cdot \int_0^{\tau_n} \left(\frac{F}{m} \right)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \left\{ \frac{1}{\tau_n} \cdot \int_0^{\tau_n} (\ddot{x}(t))^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \Rightarrow \min. \quad (41)$$

Тут, у (41), а також у подальшому F означає силу інерції, m – масу вантажу, τ_n – тривалість процесу пуску, t – поточний час. Рівняння Ейлера-Пуассона, яке є необхідною умовою реалізації критерію (41), має вигляд:

$$x^{(IV)}(t) = 0. \quad (42)$$

Його (рівняння (42)) розв'язок будемо розшукувати у просторі функцій, які є сплайнами по t третього порядку. Тоді для встановлення такого розв'язку $x(t)$ використаємо наступні термінальні умови:

$$x|_{t=0} = \dot{x}|_{t=0} = 0; \quad \dot{x}|_{t=0} = a(0); \quad \ddot{x}|_{t=\tau_n} = 0. \quad (43)$$

Характеристики руху вантажу у цьому режимі пуску механізму підйому гусеничних машин мають вигляд:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a(0)t^2}{2} - \frac{a(0)t^3}{6\tau_n}; & \dot{x}(t) = a(0)t - \frac{a(0)t^2}{2\tau_n}; \\ \ddot{x}(t) = a(0) - \frac{a(0)t}{\tau_n}; & \ddot{x}(t) = -\frac{a(0)}{\tau_n}. \end{cases} \quad (44)$$

Оскільки $\dot{x}|_{t=\tau_n} = V_c$, тоді з (44) можна знайти V_c , знаючи $a(0)$ та τ_n :

$$V_c = \frac{a(0)\tau_n}{2}. \quad (45)$$

5.2. Пришвидження третього порядку ($\ddot{\ddot{x}}(t)$). Критерій якості руху вантажу має вигляд:

$$I_2 = \left\{ \frac{1}{\tau_n} \cdot \int_0^{\tau_n} \left(\frac{dF}{mdt} \right)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \min \Leftrightarrow \left\{ \frac{1}{\tau_n} \cdot \int_0^{\tau_n} (\ddot{\ddot{x}}(t))^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \min. \quad (46)$$

Рівняння Ейлера-Пуассона набуває у цьому випадку наступного вигляду:

$$x^{(VI)}(t) = 0. \quad (47)$$

Розв'язок (47) розшукуємо у просторі сплайн-функцій по t п'ятого порядку для наступних термінальних умов:

$$x|_{t=0} = \dot{x}|_{t=0} = 0; \quad \ddot{x}|_{t=0} = a(0); \quad \ddot{x}|_{t=\tau_n} = \ddot{x}|_{t=\tau_n} = x^{(IV)}|_{t=\tau_n} = 0. \quad (48)$$

Кінематичні (та деякі динамічні) характеристики руху вантажу у період пуску механізму його підйому гусеничних машин для цього випадку (режиму пуску) набувають вигляду:

$$\left\{ \begin{aligned} x(t) &= \frac{a(0)}{2}t^2 - \frac{a(0)t^3}{2\tau_n} + \frac{a(0)t^4}{4\tau_n^2} - \frac{a(0)t^5}{20\tau_n^3}; \\ \dot{x}(t) &= a(0)t - \frac{3}{2} \cdot \frac{a(0)t^2}{\tau_n} + \frac{a(0)t^3}{\tau_n^2} - \frac{a(0)t^4}{4\tau_n^3}; \\ \ddot{x}(t) &= a(0) - \frac{3a(0)}{\tau_n}t + \frac{3a(0)t^2}{4\tau_n^2} - \frac{a(0)t^3}{\tau_n^3}; \\ \ddot{\ddot{x}}(t) &= -\frac{3a(0)}{\tau_n} + \frac{6a(0)t}{\tau_n^2} - \frac{3a(0)t^2}{\tau_n^3}; \\ x^{(IV)}(t) &= \frac{6a(0)}{\tau_n^2} - \frac{6a(0)t}{\tau_n^3}; \quad x^{(V)}(t) = -\frac{6a(0)}{\tau_n^3}. \end{aligned} \right. \quad (49)$$

Оскільки $\dot{x}|_{t=\tau_n} = V_c$, тоді з (49) легко знайти:

$$V_c = \frac{a(0)\tau_n}{4}. \quad (50)$$

5.3. Пришвидшення четвертого порядку ($x^{(IV)}(t)$). Критерій якості руху вантажу має вигляд:

$$I_3 = \left\{ \frac{1}{\tau_n} \cdot \int_0^{\tau_n} \left(\frac{d^2 F}{mdt^2} \right)^2 dt \right\}^{1/2} \Rightarrow \min \Leftrightarrow \left\{ \frac{1}{\tau_n} \cdot \int_0^{\tau_n} \left(x^{(IV)}(t) \right)^2 dt \right\}^{1/2} \Rightarrow \min. \quad (51)$$

Рівняння Ейлера-Пуассона набуває у цьому випадку наступного вигляду:

$$x^{(VIII)}(t) = 0. \quad (52)$$

Розв'язок (52) розшукуємо у просторі сплайн-функцій по t сьомого порядку для наступних термінальних умов:

$$x|_{t=0} = \dot{x}|_{t=0} = 0; \quad \ddot{x}|_{t=0} = a(0); \quad \ddot{x}|_{t=\tau_n} = \ddot{x}|_{t=\tau_n} = x^{(IV)}|_{t=\tau_n} = x^{(V)}|_{t=\tau_n} = x^{(VI)}|_{t=\tau_n} = 0. \quad (53)$$

Кінематичні та динамічні характеристики руху вантажу у період пуску механізму його підйому гусеничних машин для цього випадку (режиму пуску) набувають наступного вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{a(0)}{2}t^2 - \frac{5a(0)t^3}{6\tau_n} + \frac{5a(0)t^4}{6\tau_n^2} - \frac{a(0)t^5}{2\tau_n^3} + \frac{a(0)t^6}{9\tau_n^4} - \frac{a(0)t^7}{42\tau_n^5}; \\ \dot{x}(t) = a(0)t - \frac{5a(0)t^2}{2\tau_n} + \frac{10a(0)t^3}{3\tau_n^2} - \frac{5a(0)t^4}{2\tau_n^3} + \frac{a(0)t^5}{\tau_n^4} - \frac{a(0)t^6}{6\tau_n^5}; \\ \ddot{x}(t) = a(0) - \frac{5a(0)t}{\tau_n} + \frac{10a(0)t^2}{\tau_n^2} - \frac{10a(0)t^3}{\tau_n^3} + \frac{5a(0)t^4}{\tau_n^4} - \frac{a(0)t^5}{\tau_n^5}; \\ \ddot{\ddot{x}}(t) = -\frac{5a(0)}{\tau_n} + \frac{20a(0)t}{\tau_n^2} - \frac{30a(0)t^2}{\tau_n^3} + \frac{20a(0)t^3}{\tau_n^4} - \frac{5a(0)t^4}{\tau_n^5}; \\ x^{(IV)}(t) = \frac{20a(0)}{\tau_n^2} - \frac{60a(0)t}{\tau_n^3} + \frac{60a(0)t^2}{\tau_n^4} - \frac{20a(0)t^3}{\tau_n^5}; \\ x^{(V)}(t) = -\frac{60a(0)}{\tau_n^3} + \frac{120a(0)t}{\tau_n^4} - \frac{60a(0)t^2}{\tau_n^5}; \\ x^{(VI)}(t) = \frac{120a(0)}{\tau_n^4} - \frac{120a(0)t}{\tau_n^5}; \\ x^{(VII)}(t) = -\frac{120a(0)}{\tau_n^5}. \end{array} \right. \quad (54)$$

Оскільки $\dot{x}|_{t=\tau_n} = V_c$, тоді з (54) легко знайти:

$$V_c = \frac{a(0)\tau_n}{6}. \quad (55)$$

Розглянемо далі режими пуску механізмів підйому вантажів гусеничних машин, які задовольняють критерію плавного пуску за швидкістю. Зрозуміло, що такі режими пуску призведуть до мінімізації виникаючих коливань у системі «вантаж-канат-привод» у кінці пускового періоду (саме завдяки плавності пуску).

Для швидкості руху $\dot{x}(t) \equiv v(t)$ будемо розшукувати закон її зміни у часі t у просторі сплайн-функцій по t п'ятого порядку, тобто:

$$v(t) = v_0 + v_1t + v_2t^2 + v_3t^3 + v_4t^4 + v_5t^5. \quad (56)$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів даної сплайн-функції $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ використаємо наступні термінальні умови:

$$v|_{t=0} = 0; \dot{v}|_{t=0} = a(0); \ddot{v}|_{t=0} = 0; v|_{t=\tau_n} = V_c; \dot{v}|_{t=\tau_n} = 0; \ddot{v}|_{t=\tau_n} = 0. \quad (57)$$

Тоді матимемо:

$$v_0 = 0; v_1 = a(0); v_2 = 0. \quad (58)$$

Для коефіцієнтів v_3, v_4, v_5 можна отримати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a(0)\tau_n + v_3\tau_n^3 + v_4\tau_n^4 + v_5\tau_n^5 = V_c; \\ a(0) + 3v_3\tau_n^2 + 4v_4\tau_n^3 + 5v_5\tau_n^4 = 0; \\ 6v_3\tau_n + 12v_4\tau_n^2 + 20v_5\tau_n^3 = 0, \end{cases} \quad (59)$$

яку можна легко розв'язати аналітичним шляхом, використовуючи правило Крамера й розкриваючи визначники системи: $\Delta v, \Delta v_3, \Delta v_4, \Delta v_5$ – за правилом трикутників Саррюса.

Маємо:

$$\begin{cases} v_3 = 10 \cdot \frac{V_c}{\tau_n^3} - 6 \cdot \frac{a(0)}{\tau_n^2}; & v_4 = 8 \cdot \frac{a(0)}{\tau_n^3} - 15 \cdot \frac{V_c}{\tau_n^4}; \\ v_5 = 6 \cdot \frac{V_c}{\tau_n^5} - 3 \cdot \frac{a(0)}{\tau_n^4}. \end{cases} \quad (60)$$

Тоді $v(t)$ набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned} v(t) = a(0)t + \left[10 \cdot \frac{V_c}{\tau_n^3} - 6 \cdot \frac{a(0)}{\tau_n^2} \right] \cdot t^3 + \left[8 \cdot \frac{a(0)}{\tau_n^3} - 15 \cdot \frac{V_c}{\tau_n^4} \right] \cdot t^4 + \\ + \left[6 \cdot \frac{V_c}{\tau_n^5} - 3 \cdot \frac{a(0)}{\tau_n^4} \right] \cdot t^5. \end{aligned} \quad (61)$$

Для $a(t) \equiv \dot{v}(t)$ з (61) легко отримати:

$$\begin{aligned} a(t) = a(0) + \left[\frac{30V_c}{\tau_n^3} - \frac{18a(0)}{\tau_n^2} \right] \cdot t^2 + \left[\frac{32a(0)}{\tau_n^3} - \frac{60V_c}{\tau_n^4} \right] \cdot t^3 + \\ + \left[\frac{30V_c}{\tau_n^5} - \frac{15a(0)}{\tau_n^4} \right] \cdot t^4. \end{aligned} \quad (62)$$

Оскільки $x(t)|_{t=0} = 0$, то інтегруючи (61) один раз по t , матимемо:

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{a(0)t^2}{2} + \left[10 \cdot \frac{V_c}{\tau_n^3} - 6 \cdot \frac{a(0)}{\tau_n^2} \right] \cdot \frac{t^4}{4} + \left[8 \cdot \frac{a(0)}{\tau_n^3} - 15 \cdot \frac{V_c}{\tau_n^4} \right] \cdot \frac{t^5}{5} + \\ + \left[6 \cdot \frac{V_c}{\tau_n^5} - 3 \cdot \frac{a(0)}{\tau_n^4} \right] \cdot \frac{t^6}{6}. \end{aligned} \quad (63)$$

Для похідних по t функції $a(t)$ маємо:

$$\dot{a}(t) = \left[\frac{60V_c}{\tau_n^3} - \frac{36a(0)}{\tau_n^2} \right] \cdot t + \left[\frac{96a(0)}{\tau_n^3} - \frac{180V_c}{\tau_n^4} \right] \cdot t^2 + \left[\frac{120V_c}{\tau_n^5} - \frac{60a(0)}{\tau_n^4} \right] \cdot t^3; \quad (64)$$

$$\ddot{a}(t) = \left[\frac{60V_c}{\tau_n^3} - \frac{36a(0)}{\tau_n^2} \right] + \left[\frac{192a(0)}{\tau_n^3} - \frac{360V_c}{\tau_n^4} \right] \cdot t + \left[\frac{360V_c}{\tau_n^5} - \frac{180a(0)}{\tau_n^4} \right] \cdot t^2; \quad (65)$$

$$\ddot{a}(t) = \left[\frac{192a(0)}{\tau_n^3} - \frac{360V_c}{\tau_n^4} \right] + \left[\frac{720V_c}{\tau_n^5} - \frac{360a(0)}{\tau_n^4} \right] \cdot t; \quad (66)$$

$$a^{(IV)}(t) = \frac{720V_c}{\tau_n^5} - \frac{360a(0)}{\tau_n^4}. \quad (67)$$

Якщо задовольнити додатковій умові гладкості руху щодо прискорення $a(t)$ в кінці стадії пуску, тобто:

$$\ddot{a}(t)|_{t=\tau_n} = 0, \quad (68)$$

тоді можна отримати зв'язок між $a(0)$ та V_c для такого режиму пуску механізму підйому вантажу:

$$V_c = \frac{2a(0)\tau_n}{5}. \quad (69)$$

На рис.4 наведені залежності $v(t)$ та $a(t)$ для режиму пуску механізму підйому вантажу, які відповідають залежностям (61) та (62) й умові (68).

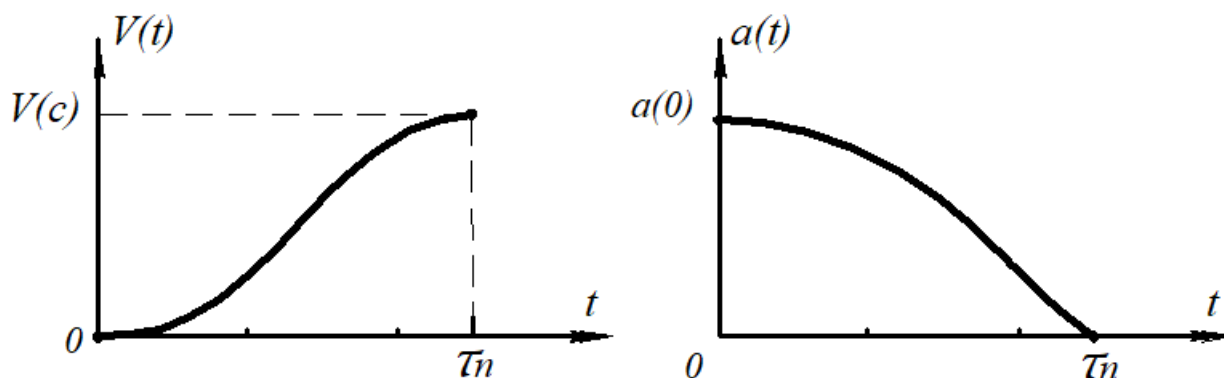


Рис.2. Залежності $v(t)$ та $a(t)$ для режиму пуску, який задовольняє умовам гладкості.

Висновки.

1. Встановлені основні кінематичні та динамічні характеристики режимів пуску механізму підйому вантажу гусеничних машин, за яких якість вказаного руху визначають критерії, що мінімізують пришвидшення вантажу другого, третього та четвертого порядку протягом перехідного періоду.

2. Встановлені кінематичні та динамічні характеристики вказаних вище режимів пуску механізму підйому вантажу гусеничних машин, за яких якість вказаного руху визначають критерії, що обумовлені «гладкістю» зміни у часі t закону для швидкості $v(t)$ та прискорення $a(t)$.

3. Результати, отримані у даному дослідженні, можуть у подальшому бути використані для уточнення й вдосконалення інженерних методів розрахунку систем для підйому вантажу гусеничних машин на стадіях їх проєктування, конструювання та у режимах реальної експлуатації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Задорожний А.О., Човнюк Ю.В., Чередніченко П.П., Остапущенко О.П., Кравченко І.М. Аналіз та синтез оптимальних режимів руху вантажопідйомних механізмів гусеничних машин. Частина І. Вимушені коливання за різних імпульсно-силових впливів. Просторовий розвиток, вип. 8. К.: КНУБА, 2024. С. 255-273.
2. Задорожний А.О., Човнюк Ю.В., Чередніченко П.П., Остапущенко О.П., Кравченко І.М. Аналіз та синтез оптимальних режимів руху вантажопідйомних механізмів гусеничних машин. Частина ІІ. Енергоощадні режими пуску механізму підйому з різними критеріями. Просторовий розвиток, вип. 9. К.: КНУБА, 2024. С. 175-189.
3. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. - М.: Наука, 1990. 592 с.
4. Горский Б.Е., Ловейкин В.С. Критерии динамического совершенствования механических систем. Теория машин металлургического и горного оборудования. - Свердловск: УПИ, 1989. Вып.13. С. 98-102.
5. Горский Б.Е. Динамическое совершенствование механических систем. - К.: Віпол, 1995. 292 с.
6. Хитрик В.Э. Методы динамической оптимизации механизмов машин-автоматов. - Л.: Изд-во Ленингр.ун-та, 1974. 116 с.
7. Ловейкін В.С. Критерії оцінки режимів руху механізмів і машин. Збірник наукових праць НАУ. Т.4. - К., 1998. С. 8-12.
8. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. - М.: Наука, 1977. 544 с.
9. Ловейкін В.С. Оптимізація режимів руху машин і механізмів. Машинознавство. 1999. №7 (25). С. 24-31.
10. Ловейкін В.С. Расчеты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин. - К.:УМК ВО, 1990. 168 с.
11. Кожевников С.Н. Динамика машин с упругими звеньями. -К.: Изд-во АН УССР, 1961. 384 с.
12. Смахов А.А., Ерофеев Н.И. Оптимальное управление подъемно-транспортными машинами. - М.: Машиностроение, 1975. 239 с.
13. Григоров О.В., Ловейкін В.С. Оптимальне керування рухом механізмів вантажопідйомних машин. - К.: Віпол, 1997, 264 с.
14. Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Пастушенко С.І. Моделювання динаміки механізмів вантажопідйомних машин. - К.-Миколаїв: Вид-во РВВ МДАУ, 2004. 286 с.
15. Ловейкін В.С., Назаренко І.І., Онищенко О.Г. Теорія технічних систем. - К.-Полтава: ІЗ МН-ПДТУ, 1998. 200 с.
16. Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О. Оптимізація перехідних режимів руху механічних систем прямим варіаційним методом. Монографія. - К., - Ніжин: Видавець П.П. Лисенко М.М., 2010. 184 с.

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor **Zadorozhny Andrey**,
National Technical University “Kharkov Polytechnic Institute”, Ukraine,
Ph.D., Associate Professor **Chovnyuk Yurii**,
Associate Professor **Cherednichenko Petro**,
Ph.D., Associate Professor **Ostapushchenko Olga**, **Kravchenko Igor**,
Kyiv National University of Construction and Architecture, Ukraine

**MOVEMENT OPTIMAL MODES ANALYSIS AND SYNTHESIS
OF TRACKED VEHICLES LOAD-LIFTING MECHANISMS
PART III. THE INFLUENCE OF START-UP MODES ON THE DYNAMIC
LOADS OF THE LIFTING MECHANISM ELASTIC ELEMENTS (ROPES)**

The main dynamic and kinematic characteristics of tracked vehicles load-lifting mechanisms optimal start-up modes are established in the work which are based on the minimization during the second, third and fourth order acceleration transient regime. Specified criteria physical content is reduced to the optimization (minimization) of the specific (per unit of load mass) inertial force and its time derivatives (first and second order). In addition, the solutions of the corresponding Euler-Poisson equations (the fourth, sixth and eighth orders in time t) for the cargo movement coordinate are sought in the class of spline functions over time of the third, fifth and seventh orders, and the unknown coefficients of the specified spline functions are found from the corresponding physically justified conditions (i.e. terminal). The start-up mode is also considered, which is based on the satisfaction of the movement smoothness condition for this movement speed and acceleration change in time law. Using the latter makes it possible to establish an analytical relationship between the initial acceleration of the created movement and its speed after the end of the start-up process and the “load-rope-drive” system exit to the established movement mode at a constant speed.

Key words: analysis; synthesis; optimization; movement modes; starting; tracked vehicles load-lifting mechanisms; spline functions over time, movement quality criteria, smoothness, high-order acceleration.

REFERENCES

1. Zadorozhnyi A.O., Chovniuk Yu.V., Cherednichenko P.P., Ostapushchenko O.P., Kravchenko I.M. Analiz ta syntezy optimalnykh rezhymiv rukhu vantazhopidomnykh mekhanizmiv husenychnykh mashyn. Chastyna I. Vymusheni kolyvannia za riznykh impulsno-sylovykh vplyviv. Prostorovyi rozvytok, vyp. 8. K.: KNUBA, 2024. S. 255-273.
2. Zadorozhnyi A.O., Chovniuk Yu.V., Cherednichenko P.P., Ostapushchenko O.P., Kravchenko I.M. Analiz ta syntezy optimalnykh rezhymiv rukhu

vantazhopidiomnykh mekhanizmiv husenychnykh mashyn. Chastyna II. Enerhooshchadni rezhymy pusku mekhanizmu pidomu z riznymi kryteriiamy. Prostorovy rozvytok, vyp. 9. K.: KNUBA, 2024. S. – 175-189

3. Levytskyi N.Y. Teoriya mekhanyzmov y mashyn. - M.: Nauka, 1990. 592 s. {in Russian}

4. Horskyi B.E., Loveikyn V.S. Kryteryi dynamycheskoho sovershenstvovaniya mekhanycheskykh system. Teoriya mashyn metallurhycheskoho y hornoho oborudovaniya. - Sverdlovsk: UPY, 1989. Vyp.13. S. 98-102. {in Russian}

5. Horskyi B.E. Dynamycheskoe sovershenstvovanye mekhanycheskykh system. – K.: Vipol, 1995. 292 s. {in Russian}

6. Khytryk V.E. Metody dynamycheskoi optymizatsyy mekhanyzmov mashyn-avtomatov. - L.: Yzd-vo Lennhr.un-ta, 1974. 116 s. {in Russian}

7. Loveikin V.S. Kryterii otsinky rezhymiv rukhu mekhanizmiv i mashyn. Zbirnyk naukovykh prats NAU. T.4. - K., 1998. S. 8-12. {in Ukrainian}

8. Kylchevskyi N.A. Kurs teoretycheskoi mekhanyky. - M.: Nauka, 1977. 544 s. {in Russian}

9. Loveikin V.S. Optymizatsiia rezhymiv rukhu mashyn i mekhanizmiv. Mashynoznavstvo. 1999. №7 (25). S. 24-31. {in Ukrainian}

10. Loveikin V.S. Raschety optimalnykh rezhymov dvyzheniya mekhanyzmov stroytelnykh mashyn. - K.: UMK VO, 1990. 168 s. {in Russian}

11. Kozhevnykov S.N. Dynamika mashyn s upruhymy zveniamy. - K.: Yzd-vo AN USSR, 1961. 384 s. {in Russian}

12. Smekhov A.A., Erofeev N.Y. Optymalnoe upravlenye podymno-transportnymi mashynamy. - M.: Mashynostroenye, 1975. 239 s. {in Russian}

13. Hryhorov O.V., Loveikin V.S. Optymalne keruvannia rukhom mekhanizmiv vantazhopidiomnykh mashyn. - K.: Vipol, 1997, 264 c. {in Ukrainian}

14. Loveikin V.S., Chovniuk Yu.V., Dikteruk M.H., Pastushenko S.I. Modeliuvannia dynamiky mekhanizmiv vantazhopidiomnykh mashyn. - K.-Mykolaiv: Vyd-vo RVV MDAU, 2004. 286 s. {in Ukrainian}

15. Loveikin V.S., Nazarenko I.I., Onyshchenko O.H. Teoriia tekhnichnykh system. - K. - Poltava: IZ MN-PDTU, 1998. 200 s. {in Ukrainian}

16. Loveikin V.S., Romasevych Yu.O. Optymizatsiia perekhidnykh rezhymiv rukhu mekhanichnykh system priamym variatsiinym metodom. Monohrafiia. - K., Nizhyn: Vydavets P.P. Lysenko M.M., 2010. 184 s. {in Ukrainian}