

DOI: 10.32347/2786-7269.2024.8.373-390

УДК 624.04

д.т.н., професор **Сур'янінов М.Г.**,
sng@ogasa.org.ua, ORCID: 0000-0003-2592-5221,
к.т.н., доцент **Неутов С.П.**,
neutov.stepan@ogasa.org.ua, ORCID: 0000-0002-0132-124X,
Сур'янінов В.М.,
citykboss@odaba.edu.ua, ORCID: 0009-0006-9620-4287,
Одеська державна академія будівництва та архітектури

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФІБРОБЕТОНУ

Роботу присвячено розробці математичної моделі фібробетону з додатковим дисперсним армуванням сталевую фіброю та огляду інших найбільш популярних математичних моделей. При дослідженні фізико-механічних властивостей фібробетону застосовуються два підходи, які звичайно використовують при роботі з композитами — феноменологічний і структурний. У першому випадку матеріал розглядають як якусь ізотропну систему, до якої застосовні методи механіки деформівного твердого тіла. При цьому характеристики матеріалу визначаються на основі лабораторних досліджень і випробувань із застосуванням методів теорії планування експерименту і математичної статистики. У другому випадку використовується структурний аналіз, що припускає вираження механічних характеристик матеріалу через аналогічні показники його компонентів, коефіцієнт фібрового армування, тип і геометричні розміри фібри та ін. Автори пропонують побудову математичної моделі фібробетону на основі визначення його ефективних жорсткісних характеристик. У якості досліджуваного матеріалу в роботі розглядається фібробетон, виготовлений на основі сталеві фібри із загнутими кінцями. При побудові математичної моделі фібробетону важливим є визначення його ефективних властивостей, що, у свою чергу, припускає процедуру вибору й моделювання представницького об'єму матеріалу. Для побудови моделі використовуються рівняння лінійної теорії пружності. Але, оскільки розглянуте середовище є гетерогенним, враховується відомий принцип Ешелбі, який дозволяє обчислити енергію деформування системи, що містить включення. Отримані в роботі залежності можна застосовувати не тільки для сталевих фібрових волокон, але й для будь-яких інших (полімерних, скляних і ін.), а конкретизація виражень для ефективних пружних характеристик буде залежати винятково від геометричної форми фібрового волокна й виду його деформації. Розглянуто також структурне моделювання фібробетону, скінчено-елементні моделі І.М.

Галієва та V'itor M.C.F. Cunha, а також можливості моделювання фібробетону у двох найпотужніших програмах — ANSYS і NASTRAN.

Ключові слова: фібра; сталеві фібробетон; композит; математична модель; формула Ешелбі; тріщина; ANSYS; NASTRAN.

Вступ. Оскільки фібробетон є композиційним матеріалом, при дослідженні його фізико-механічних властивостей застосовуються два підходи, які звичайно використовують при роботі з композитами — феноменологічний і структурний. У першому випадку матеріал розглядають як якусь ізотропну систему, до якої застосовні методи механіки деформівного твердого тіла. При цьому характеристики матеріалу визначаються на основі лабораторних досліджень і випробувань із застосуванням методів теорії планування експерименту і математичної статистики.

У другому випадку використовується структурний аналіз, що припускає вираження механічних характеристик матеріалу через аналогічні показники його компонентів, коефіцієнт фібрового армування, тип і геометричні розміри фібри та ін.

У нашій країні найбільше поширення має структурний підхід до дослідження властивостей фібробетону за аналогією із залізобетоном, що дозволяє на основі властивостей вихідних компонентів визначати необхідні характеристики міцності й деформативності. Такий підхід складний, залежить від безлічі факторів, але при цьому є зручним при розв'язку завдань оптимального проектування фібробетонних конструкцій.

Феноменологічний підхід одержав широке поширення в Європі й США. Світовий досвід проектування сталеві фібробетонних конструкцій показує, що застосування феноменологічного підходу при визначенні фізико-механічних властивостей фібробетону дозволяє найбільше ефективно використовувати матеріал і проектувати раціональні фібробетонні конструкції.

Аналіз попередніх досліджень. Моделювання фібробетону, втім, як і звичайного бетону, є найважливішим питанням, оскільки від адекватного відображення в моделі властивостей матеріалу суттєво залежать розрахунки й конструювання будь-якої конструкції. У цьому зв'язку питанню побудові моделі приділяють увагу багато дослідників.

Gediminas M., Remigijus S. і Bronius J. [1] запропонували модель сталеві фібробетону, засновану на загальних принципах моделювання конструкційних композитів. На відміну від інших моделей, тут враховані пружні й пластичні властивості компонентів (бетон і сталь). Основною перешкодою для реалістичних моделей з фібробетону (FRC), як затверджується в [2], є локальна зміна властивостей матеріалів, що не дозволяє надійно

моделювати фібробетон на структурному рівні. Ідея, представлена в цій статті, використовує існуючу конститутивну модель, але вирішує проблему локальної зміни матеріалу за допомогою попередньої обробки на основі рентгенівської комп'ютерної томографії (КТ). У статті [3] пропонуються чисельні моделі для дослідження руйнування фібробетону. Поведінка матеріалу описана на макро- і мезоуровнях. У дослідженні [4] результати випробувань експериментальних зразків, зібрані з літератури, використовуються для формування рівняння на основі оцінки діаграм розтягання-деформації SFRC з використанням методу генетичного програмування (GP). На відміну від аналогічних досліджень, у [5, 6] вплив волокон на бетон, армований фіброю, прямо описується на основі кривих одноосьового стиску й розтягання. Для цього вплив волокна на варіації напруження витягується з різниці між сталевим фібробетоном і його відповідною бетонною матрицею на основі кривих напруження-деформація при одноосьовому напруженому стані. У роботі [7] представлена нова чисельна модель, заснована на використанні скінчених елементів для моделювання поведінки бетону, армованого сталевією фіброю (SFRC) з дискретним і явним представленням сталевих волокон. Матеріал описується як композит, що складається із трьох фаз: бетон, дискретні переривчасті волокна й поверхня розподілу волокно-матриця. Математична модель прогнозування пружних властивостей фібробетону, що враховує об'ємний зміст фібри і її геометричні параметри, запропонована в [8]. Чисельна модель фібробетону на основі моделі залізобетону представлена у [9]. У запропонованій моделі бетон моделюється за допомогою скінченого елемента для крихких матеріалів, доступного в бібліотеці ANSYS. Внесок волокна до напруженого стану бетону моделюється відповідною зміною параметрів бетону. Крім того, передача напруження за рахунок дії волоконних містків урахується шляхом розгляду волокна в якості еквівалентного розмазаного армування. У статті [10] розглядається методологія проектування оптимального складу фібробетону з використанням експериментально-статистичних моделей властивостей бетону. Отримані математичні моделі міцності сталевіфібробетону для стиску й вигину, і модель витрати використовуваного суперпластифікатору. Дискретне моделювання окремих волокон у матеріалах на основі цементу пропонується в [11]. На думку авторів це дає ряд переваг, включаючи можливість імітувати ефекти дисперсії волокон у композитах до й після розтріскування.

У переважній більшості розглянутих вище робіт моделювання фібробетону ґрунтується на експериментальних даних і чисельних моделях. Незважаючи на їхню очевидну значимість, слід окремо зупинитися на моделях, в основі яких лежать суцільно теоретичні підходи. А.С. Солодовників [12] класифікує такі моделі в такий спосіб: моделювання фібробетону, як однорідного матеріалу;

моделювання фібробетону на різних масштабних рівнях. Роботи [13-15] присвячені побудові феноменологічних моделей на основі експериментальних даних для апроксимації визначальних співвідношень і властивостей міцності фібробетону при різних навантаженнях. Ці моделі враховують основні характеристики бетонної матриці, об'ємний вміст волокон і їх геометричні параметри.

Макромасштабна модель пластичності для високоефективних цементних композитів, армованих волокном (HPFRCC), розроблена в дисертації [16]. Пропонована модель являє собою феноменологічну конститутивну модель, здатну враховувати розтріскування, зміцнення і розміцнення при розтяганні й при стиску. У дисертації [17] знову зустрічаємося із чисельним моделюванням високоміцного фібробетону. Але тут використана континуальна модель розмазаних тріщин у момент зміцнення й дискретна модель тріщин, побудована на основі механіки руйнування й розширеного методу скінчених елементів у момент руйнування. Вплив армуючих волокон враховувався за рахунок модифікування законів зміцнення й руйнування. У дисертації [18] розрахункові моделі фібробетону побудовані, виходячи з концепцій механіки руйнування. У статті [19] представлено моделювання механічної поведінки сталевого фібробетону SFRC з використанням методу гомогенізації. Випадковий розподіл волокон перетворений у періодичний.

Деякі аспекти фібробетону (FRC) досліджуються в рамках мікромеханіки в роботах [20, 21].

Мета. Метою роботи була розробка математичної моделі фібробетону з додатковим дисперсним армуванням сталевую фіброю та огляд інших найбільш популярних математичних моделей.

Матеріали та методи дослідження. Використовуються методи теорії композитів, механіки деформівного твердого тіла, математичного аналізу, скінчених елементів.

Результати та обговорення.

Авторська математична модель фібробетону на основі ефективних жорсткісних характеристик

Відомо, що бетон розглядається у вигляді гетерогенного середовища, яке має неоднорідну й неупорядковану структуру, що містить зерна крупного і дрібного заповнювача. Суцільність цього середовища порушена наявністю пор і усадочних тріщин. Виділяють чотири елементи структури : макро-, мезо-, мікро- і субмікроструктуру [22].

Впливу структури бетону на процес утвору й розвитку тріщин присвячена велика кількість публікацій. Знаковими тут є роботи Б.Г. Скрамтаєва [23], О.Я. Берга [24], А.А. Гвоздьова [25-26].

Аналіз характеру зміцнення фібробетону на рівні мікроструктури вимагає побудови нової математичної моделі, відмінної від тих, які застосовуються при моделюванні бетону. Тут ми пропонуємо побудову математичної моделі фібробетону на основі визначення його ефективних жорсткісних характеристик. У якості досліджуваного матеріалу в роботі розглядається фібробетон, виготовлений на основі сталевих фібри із загнутими кінцями.

Одним з основних завдань при побудові математичної моделі фібробетону є визначення його ефективних властивостей, що, у свою чергу, припускає процедуру вибору й моделювання представницького об'єму матеріалу.

Для побудови математичної моделі будемо використовувати рівняння лінійної теорії пружності. Напишемо ці співвідношення для загального випадку:

рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0; \quad (1)$$

співвідношення Коші:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (2)$$

рівняння закону Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (3)$$

де C_{ijkl} — тензор жорсткості.

Рівняння (3) записані для найбільш загального випадку, і тут C_{ijkl} має 81 компоненту, але для реальних матеріалів їх число істотно знижується.

Для ізотропного тіла залишаються тільки дві незалежні компоненти, а вираження (3) ухвалює вид

$$C_{ij} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Співвідношення між напруженнями і деформаціями записуються так:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (5)$$

де λ й μ — параметри Ламе, δ_{ij} — символ Кронекера.

Але, оскільки розглянуте середовище є гетерогенним, врахуємо відомий

принцип Ешелбі [27], який дозволяє обчислити енергію деформування системи, що містить включення. Формула Ешелбі дозволяє визначити цю енергію шляхом переходу від інтегрування за об'ємом до інтегрування по деякій поверхні. Розглянемо який-небудь елементарний об'єм бетону, усередині якого є одне фіброве волокно (рис. 1).

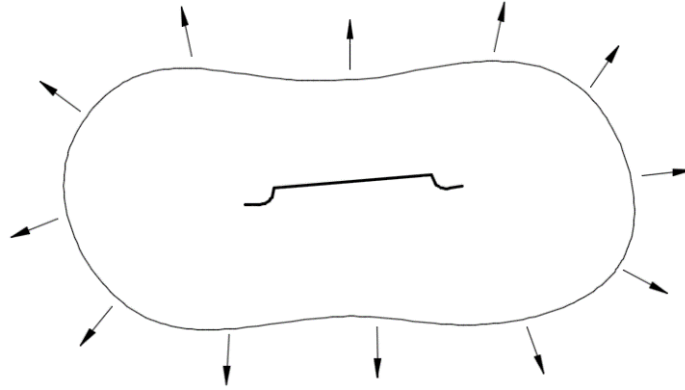


Рис. 1. Елементарний об'єм фібробетону

Будемо вважати, що умови на поверхні задані в напруженнях.

Позначимо напруження, деформації та переміщення (рис. 1), через σ_{ij} , ε_{ij} і u_i , а ці ж величини для випадку, коли усередині елементарного об'єму немає фібрового волокна — через σ_{ij}^0 , ε_{ij}^0 і u_i^0 .

Енергія деформування для кожного із цих випадків запишеться у вигляді

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV; \quad (6)$$

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 dV; \quad (7)$$

де V — елементарний об'єм.

Віднімаючи (7) з (6), одержимо

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0) dV. \quad (8)$$

Застосовуючи до (2.8) теорему Остроградського-Гауса й враховуючи, що рівняння рівноваги для двох розглянутих випадків мають вигляд

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} = 0,$$

одержимо

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_S (\sigma_i u_i - \sigma_i^0 u_i^0) dS, \quad (9)$$

де S — поверхня тіла.

Оскільки граничні умови — однакові, на поверхні будемо мати

$$\sigma_i = \sigma_i^0, \quad (10)$$

і тоді

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_S \sigma_i^0 (u_i - u_i^0) dS. \quad (11)$$

Опускаючи проміжні перетворення формули (11), які досить громіздкі, але докладно описані в багатьох підручниках з теорії пружності, приведемо остаточний вигляд формули Ешелбі, коли граничні умови задані в напруженнях:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_{S_1} (\sigma_i^0 u_i - \sigma_i u_i^0) dS. \quad (12)$$

Якщо ж граничні умови задані в переміщеннях, то формула Ешелбі записується так:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_{S_1} (\sigma_i u_i^0 - \sigma_i^0 u_i) dS. \quad (13)$$

У формулах (12) і (13) S_1 — поверхня фібрового волокна в елементарному об'ємі.

Використовуючи формули Ешелбі, перейдемо до визначення ефективних жорсткостей фібробетону, під якими будемо розуміти середні величини жорсткості, які враховують властивості всіх фаз фібробетону і їх взаємодію.

Будемо розглядати фібробетон як гетерогенну структуру із чітко вираженими двома фазами. Перша фаза являє собою безупинно розподілений за об'ємом бетон, а друга фаза — дискретні включення у вигляді волокон фібри. При цьому кожна з фаз будемо вважати однорідною і ізотропною.

Вважаючи, що фіброві волокна розподілені за об'ємом рівномірно й знаючи відсоток фібрового армування, можна визначити умовно середню відстань між центрами ваги (або, що те ж саме, між геометричними центрами) окремих фібр. Ця відстань є характерним розміром неоднорідності фібробетону.

Розмір довжини осереднення (позначимо його через δ), у межах якого можна осереднити властивості фібробетону, використовуючи статистичний підхід, значно більше, ніж розмір неоднорідності, але при цьому набагато менше характерних розмірів фібробетонної конструкції. Це означає, що існує якийсь проміжний розмір, у межах якого осереднення характеристик фібробетону є обґрунтованим. У теорії композитів викладений підхід

називається умовою ефективної гомогенності, або еквівалентної гомогенності.

Використовуючи процедуру осереднення, можна описати ефективні властивості фібробетону, як еквівалентного гомогенного середовища, через властивості фібри й бетону і їх геометричні параметри, а потім використовувати ці властивості в розрахунках фібробетонних конструкцій.

Розглянемо елементарний об'єм фібробетону, розміри якого порівнянні з масштабом осереднення δ (рис. 2).

Середні значення напружень і деформацій, що виникають при дії зовнішнього навантаження, будуть

$$\sigma_{ij}^m = \int_V \sigma_{ij}(x_i) dV; \quad (14)$$

$$\varepsilon_{ij}^m = \int_V \varepsilon_{ij}(x_i) dV. \quad (15)$$

Ефективні жорсткості C_{ijkl} визначаються співвідношенням

$$\sigma_{ij}^m = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^m. \quad (16)$$

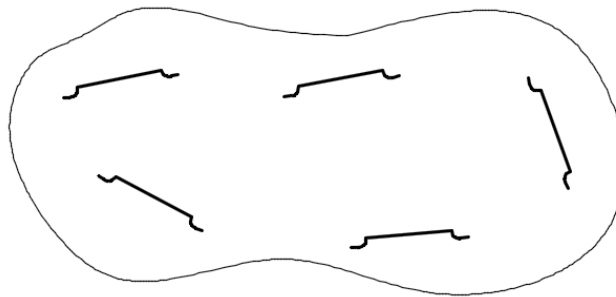


Рис. 2. До визначення ефективних жорсткостей

Оскільки, як ми вже відзначали вище, фібробетон розглядається нами як гетерогенна структура, що складається із двох ізотропних фаз, співвідношення між напруженнями і деформаціями можна записати для фібри у вигляді

$$\sigma_{ij}^f = \lambda_f \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu_f \varepsilon_{ij}, \quad (17)$$

а для бетону

$$\sigma_{ij}^b = \lambda_b \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu_b \varepsilon_{ij}, \quad (18)$$

де $\lambda_f, \lambda_b, \mu_f, \mu_b$ — параметри Ламе.

Тепер (14) можна переписати так:

$$\sigma_{ij}^m = \frac{1}{V} \left(\int_{V_b} \sigma_{ij} dV + \sum_{n=1}^N \int_{V_f} \sigma_{ij} dV \right), \quad (19)$$

де N — кількість фібр в об'ємі V ;

$V_b = V - \sum_{n=1}^N V_f$ — об'єм бетону;

V_f — сумарний об'єм N фібр.

А якщо тепер врахувати (18), то будемо мати

$$\sigma_{ij}^m = \frac{1}{V} \left[\int_V (\lambda_b \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu_b \varepsilon_{ij}) dV - \sum_{n=1}^N \int_{V_f} (\lambda_b \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu_b \varepsilon_{ij}) dV + \sum_{n=1}^N \int_V \sigma_{ij} dV \right]. \quad (20)$$

Враховуючи (16) і інтегруючи перший доданок в (20), одержимо

$$C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^m = \lambda_b \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^m + 2\mu_b \varepsilon_{ij}^m + \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \int_{V_f} (\sigma_{ij} - \lambda_b \delta_{ij} \varepsilon_{kk} - 2\mu_b \varepsilon_{ij}) dV. \quad (21)$$

Таким чином, отримане вираження, яке дозволяє описати ефективні характеристики фібробетону при малому об'ємному змісті фібри. А, оскільки в наших попередніх роботах і в дослідженнях інших авторів показано, що оптимальний зміст фібри за об'ємом конструкції в переважній більшості випадків становить (1-1,5)% (рідше – 2%, що теж можна віднести до малого об'ємного змісту), запропонований підхід до опису ефективних характеристик фібробетону має дуже широку область застосування.

Отримані в роботі залежності можна застосовувати не тільки для сталевих фібрових волокон, але й для будь-яких інших (полімерних, скляних і ін.), а конкретизація виражень для ефективних пружних характеристик буде залежати винятково від геометричної форми фібрового волокна й виду його деформації.

Стосовно до фібри із загнутими кінцями, використовуваної в наших дослідженнях, представляється можливим цю форму вважати циліндричною.

Інші математичні моделі

Структурне моделювання фібробетону запропоновано Ю.Є. Курбатовим [28], який виконав аналітичний огляд існуючих підходів до моделювання фібробетону, продемонстрував етапи вивчення процесу моделювання матриці, заповнювача, фібри і пор, що включають створення їх геометрії та орієнтації елементів у просторі, призначення ефективних властивостей, закріплення створеної моделі та її навантаження. Представлені різні варіанти геометричної форми заповнювача, пір, вказані діапазони варвання їх характерними розмірами та орієнтацією у просторі цементної матриці. Ця робота є основою для проведення обчислювального експерименту, що включає всі вищевказані етапи для отримання нових даних про процес поступового накопичення ушкоджень у структурі фібробетону при впливі статичного навантаження.

Зроблений висновок про те, що при наявності пор з'являється істотна нерівномірність розподілу компонентів напружень і деформацій за об'ємом досліджуваної моделі. Описаний підхід розбудовує А.М. Харітонов [29], розраховуючи узагальнюючу модель структури дрібнозернистого бетону з метою відстежити неоднорідність розподілу напружень в об'ємі матеріалу, обумовлену великою відмінністю величин модулів пружності цементного каменю і заповнювача.

Скінчено-елементні моделі фібробетону

На сьогоднішній день існує цілий ряд скінчено-елементних моделей фібробетону, запропонованих вченими різних країн. Зупинимося на двох з них [30, 31], які нам представляються найцікавішими.

Модель І.М. Галієва. Використовується варіаційний метод побудови системи рівнянь методу скінчених елементів. Розглядається шестигранний скінчений елемент із включеними в нього фібрами (рис. 3).

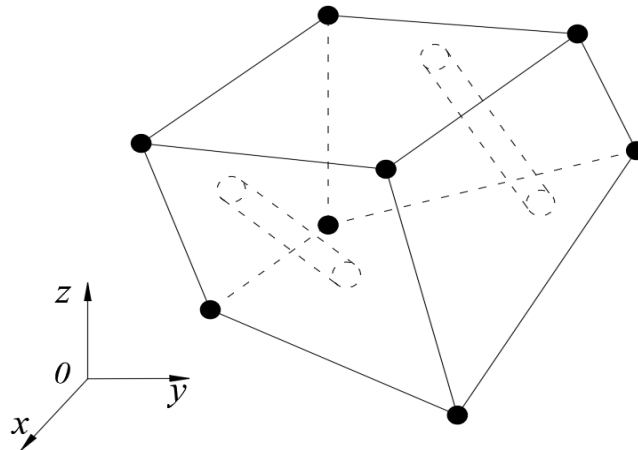


Рис. 3. Шестигранний скінчений елемент із двома фібрами

В основі моделі лежить припущення про слабкий вплив згинальних характеристик фібри на властивості матеріалу, а істотним вважається тільки вплив стиску й розтягання фібри. Це дозволило описати фібри стрижневими скінченими елементами. Так що переміщення кінців фібри виражаються через переміщення вузлів скінченого елемента, у якому перебуває фібра. У результаті, не збільшуючи розмірність підсумкової алгебраїчної системи рівнянь, можна описувати пружну поведінку фібробетону. Потенційна енергія деформації в цьому випадку буде складатися з потенційної енергії сполучного всього елемента без фібр за винятком потенційної енергії сполучного в області простору, займаного фібрами і потенційної енергії фібр. Для виводу рівнянь знадобляться відомі формули теорії пружності й методу скінчених елементів.

Стан рівноваги або руху деформівних систем поряд з диференціальними рівняннями може описуватися за допомогою варіаційних принципів. Наприклад, за допомогою принципу найменшої дії Гамільтона: із усіх припустимих переміщень найбільш імовірним є переміщення, відповідне до мінімуму функціонала Лагранжа. Після розбивки тіла на скінчені елементи необхідно деформації (переміщення) інтерполювати деякою функцією, використовуючи значення переміщень у вузлах елемента. Застосовуючи принцип Гамільтона, остаточно одержимо систему алгебраїчних рівнянь для

знаходження переміщень вузлів шестигранного скінченного елемента з фібрами, представленими стрижневими скінченими елементами:

$$\left(\bar{k}_H - \sum_{i=1}^n \bar{k}_{HTi} + \sum_{i=1}^n \bar{G}_i^T \bar{K}_{Ti} \bar{G}_i \right) \vec{d}_H + \left(\bar{m}_H - \sum_{i=1}^n \bar{m}_{HTi} + \sum_{i=1}^n \bar{G}_i^T \bar{m}_{Ti} \bar{G}_i \right) \vec{d}_H = \vec{f}_H.$$

Модель V'itor M.C.F. Cunha. V'itor M.C.F. Cunha [31] розглядає фібробетон, як гетерогенне середовище, що складається з бетону й сталевих волокон. Процес руйнування цементного каменю (неармована матриця) моделюється за допомогою моделі розмазаної тріщини. Ця неармована бетонна фаза дискретизується суцільними скінченими елементами (подібних до елементів SOLID в ANSYS). З іншого боку, має місце передача напружень між площинами тріщини за рахунок фібрового армування. Механізми перекриття активних тріщин волокнами моделюються за допомогою тривимірних елементів. Ці елементи враховують властивості інтерфейсу волокна/матриця за законами, заснованими на результатах, отриманих при випробуваннях на висмикування волокон. Випадковий розподіл волокон по матриці моделюється за допомогою алгоритму, заснованого на методі Монте-Карло, що забезпечує реалістичний розподіл волокон по об'ємному елементу. Геометрія, розташування й орієнтація волокон згодом вставляються в тривимірний скінчений елемент. Лінійні елементи, що представляють волокна, вважаються вкладеними.

Нелінійна поведінка бетонної матриці моделюється розмазаною моделлю тріщини. Такий підхід передбачає тільки одну тріщину на одне інтегрування і є частковим випадком моделі різноспрямованих тріщин.

У пропонованому підході випадковий розподіл волокон у затверділій матриці генерується процедурою Монте-Карло. Після створення сітки елементів, що представляє волокна, необхідно вставити цю «волоконну сітку» у суцільну тривимірну сітку, яка моделює звичайний бетон.

Передбачається, що вбудовані елементи (що представляють собою волокна) завжди прямі, тому досить представити волокно у вигляді двох кінцевих вузлів, певних у глобальній системі координат. Слід зазначити, що волокно може перетинати один або навіть кілька суцільних елементів, тому необхідно врахувати кілька додаткових точок. Отже, волокно можна представити декількома вкладеними елементами, у яких кожний елемент сприяє винятково посиленню одного суцільного елемента. Визначення координат цих пересічних точок виконане за допомогою методу зворотного відображення. Пошук точок перетинання здійснювався на місці вкладеного елемента. Працездатність модел оцінювалася шляхом моделювання

випробування на одноосьове розтягання й випробування на трьохточковий вигин, проведеного зі зразком бетону, армірованого сталевими волокнами.

Моделювання фібробетону в інженерних програмах розрахунку

ANSYS. На жаль, навіть така потужна програма доки не має у своїй бібліотеці спеціального фібробетонного скінченного елемента. У деяких роботах механізм руйнування бетону досліджується на основі порівневого моделювання його структури. При цьому особливо відзначається істотний вплив пористості на механічні властивості цементного каменю. Для дослідження впливу пор на НДС цементного каменю на рівні цементного гелю, як розрахункового методу, деякі автори використовують метод скінчених елементів (MCE) на базі твердотільного моделювання, реалізований у програмі ANSYS. Застосування MCE на базі структурно-імітаційних моделей дозволяє моделювати процес тріщиноутворення у вигляді, близькому по фізичній суті до реального, що охоплює не тільки поровий простір, але й тверду фазу. Дана методика в явному виді враховує фізичну й геометричну неоднорідність композиційного матеріалу. Розрахунковий комплекс ANSYS дозволяє створювати і розраховувати тривимірні моделі з найрізноманітнішою геометрією і максимальною візуалізацією одержуваних результатів. Слід зазначити, що тривимірне твердотільне моделювання дозволяє розглядати механізм тріщиноутворення бетону при об'ємному процесі руйнування.

Прийнята в деяких роботах розрахункова схема являє собою куб з однорідного ізотропного суцільного матеріалу (гелю), у якому у випадковому порядку розташовані порожнечі (пори) різних розмірів.

NASTRAN. Для моделювання елементів фібри зручно використовувати систему MSC.PATRAN-NASTRAN, у якій для розв'язку поставленого завдання найбільше підходить модель композита з випадковою орієнтацією коротких волокон в одній площині. Для підключення даної моделі необхідно використовувати методи Short Fiber 1D або Short Fiber 2D. У рамках першого методу вважається, що кут орієнтації волокон θ підкоряється нормальному закону розподілу, для якого диференціальна функція розподілу має вигляд

$$f(\theta) = \frac{1}{\sigma_\theta \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{\theta - \theta_{av}}{\sigma_\theta}\right],$$

де θ_{av} і σ_θ — математичне очікування й середнє квадратичне відхилення випадкової величини θ відповідно.

Метод Short Fiber 2D дозволяє створити модель композита з випадковою орієнтацією коротких волокон у просторі. У цьому випадку орієнтація волокон характеризується вже двома кутами θ і φ сферичної системи координат. При цьому кути орієнтації волокон підкоряються двомірному нормальному закону розподілу.

Такий підхід дозволяє моделювати ефект «розсіювання» орієнтації волокон у композитах, наприклад через технологічні погрішності, тим самим запобігаючи завищенню характеристик жорсткості матеріалу. Для підсумовування внесків різних орієнтацій волокон, розподілених за нормальним законом, застосовується схема інтегрування Монте-Карло.

При цьому саме інтегрування спрощується прийняттям допущення про те, що відхилення кутів орієнтації всіх волокон від математичного очікування (по абсолютній величині) не перевершує потроєного середнього квадратичного відхилення.

Властивості матеріалу на кожній ітерації підсумуються з використанням правила сумішей, причому скалярні величини, наприклад щільність, не міняються, і розташування фібр залишається таким же, як і у вихідного матеріалу в сферичній системі координат.

Висновки

Таким чином, запропоновано побудову математичної моделі фібробетону на основі визначення його ефективних жорсткісних характеристик. У якості досліджуваного матеріалу в роботі розглядається фібробетон, виготовлений на основі сталевих фібри із загнутими кінцями. При побудові математичної моделі фібробетону важливим є визначення його ефективних властивостей, що, у свою чергу, припускає процедуру вибору й моделювання представницького об'єму матеріалу. Для побудови моделі використовуються рівняння лінійної теорії пружності. Але, оскільки розглянуте середовище є гетерогенним, враховується відомий принцип Ешелбі, який дозволяє обчислити енергію деформування системи, що містить включення. Отримані в роботі залежності можна застосовувати не тільки для сталевих фібрових волокон, але й для будь-яких інших (полімерних, скляних і ін.), а конкретизація виражень для ефективних пружних характеристик буде залежати винятково від геометричної форми фібрового волокна й виду його деформації.

З інших відомих підходів до побудови математичної моделі фібробетону зслуговують увагу, на думку авторів, структурне моделювання фібробетону, запропоноване Ю.Є. Курбатовим, скінчено-елементні моделі І.М. Галієва та Vitor M.C.F. Cunha, а також можливості моделювання фібробетону у програмах ANSYS і NASTRAN.

Список літератури

1. Gediminas Marciukaitis, Remigijus Salna, Bronius Jonaitis, 2011, A model for strength and strain analysis of steel fiber reinforced concrete, *Journal of Civil Engineering and Management*, Vol. 17(1), pp. 137-145.
2. Buljak, V., Oesch, T., & Bruno, G. (2019). Simulating Fiber-Reinforced Concrete Mechanical Performance Using CT-Based Fiber Orientation Data. *Materials*, 12(5), 717. doi:10.3390/ma12050717

3. Congro, M., Sanchez, C.M., Roehl, D., & Marangon, E. (2019). Fracture modeling of fiber reinforced concrete in a multiscale approach. *Composites Part B: Engineering*, 106958. doi: 10.1016/j.compositesb.2019.106958.
4. Thanh Quang Khai Lam and Thi My Dung Do. Analysis of nonlinear material and steel fiber content in the double layers concrete shell. *AIP Conference Proceedings* 2283, 020008 (2020); <https://doi.org/10.1063/5.0024892>.
5. Moradi, M., Bagherieh, A.R., & Esfahani, M.R. (2018). Tensile modeling of steel fiber reinforced concrete. *Asian Journal of Civil Engineering*. doi:10.1007/s42107-018-00104-y.
6. Moradi, M., Bagherieh, A.R., & Esfahani, M.R. (2019). Constitutive modeling of steel fiber-reinforced concrete. *International Journal of Damage Mechanics*, 105678951985115. doi:10.1177/1056789519851159.
7. Luís A.G. Bitencourt Jr., Osvaldo L. Manzoli, Túlio N. Bittencourt, Frank J. Vecchio. Numerical modeling of steel fiber reinforced concrete with a discrete and explicit representation of steel fibers. *International Journal of Solids and Structures* 159 (2019) 171–190.
8. Леонович И.А. Теоретико-практическое моделирование упругих и прочностных свойств мелкозернистого фибробетона для тонкостенных фасадных элементов / И.А. Леонович, Э.И. Батяновский // *Строительная наука и техника*, 2012. № 1. С. 14–20.
9. Tatiana S.A. Ribeiro, Pedro Serna. Numerical analysis of steel fiber reinforced concrete shells. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2009, Valencia*.
10. L. Dvorkin, O. Bordiuzhenko, V. Zhitkovsky, V. Marchuk. Mathematical modeling of steel fiber reinforced concrete properties and selecting its effective composition. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering* 708 (2019) 012085 IOP Publishing doi:10.1088/1757-899X/708/1/012085.
11. Jingu Kang, Kunhwi Kim, Yun Mook Lim, John E. Bolander Modeling of fiber-reinforced cement composites: Discrete representation of fiber pullout. *International Journal of Solids and Structures* 51 (2014) 1970–1979.
12. Солодовников А.С. Численное моделирование деформирования физически нелинейного композита с короткими волокнами. Дис. ... канд. физ.-мат. наук [Текст] / А.С. Солодовников; МГУ им. М.В. Ломоносова. М.: 2017.
13. Fernandes de Almeida J., Neves R. Compressive behaviour of steel fibre reinforced concrete // *Structural Concrete*. 2005. Т. 2, № 1. С. 1-8.
14. J. Thomas, A. Ramaswamy. Mechanical Properties of Steel Fiber-Reinforced Concrete // *ASCE Journal of Materials in Civil Engineering*. 2007. Т. 19, № 5. С. 385-395.
15. Gao J., Sun W., Morino K. Mechanical properties of steel fiber reinforced high strength light weight concrete // *Cem. Concr. Compos.* 1997. Т. 19. С. 307-313.
16. K. Sirijaroonchai. A Macro-Scale Plasticity Model for High Performance Fiber Reinforced Cement Composites. Ph.D. thesis: PhD thesis, University of Michigan. 2009.
17. M. Trub. Numerical Modeling of High Performance Fiber Reinforced Cementitious Composites. Ph.D. thesis: PhD thesis, Institute of Structural Engineering Swiss Federal Institute of Technology. 2011.
18. Denneman E. Fracture in High Performance Fibre Reinforced Concrete Pavement Materials. Ph.D. thesis: PhD thesis, University of Pretoria. 2011.
19. Eldeen S.A. Taniguchi T. Modeling of fiber reinforced concrete by the homogenization method // *Journal of the Faculty of Environmental Science and Technology, Okayama University*. 2006. Т. 11, № 1. С. 43-49.
20. Evaluation of Elastic and Viscoelastic Properties of Fiber Reinforced Concrete by Means of a Micromechanical Approach / V.F. Dutra, S. Maghous, A. Filho [и др.] // *11th Pan-American Congress of Applied Mechanics*. 2009.

21. Li V.C., Wang Y., Becker S. Micromechanical Model of Tension-Softening and Bridging Toughening of Short Random Fiber Reinforced Brittle Matrix Composites // *Journal Mechanics and Physics of Solids*. 1991. Т. 39, № 5. С. 607-625.
22. Зайцев Ю.В. Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушения. М.: 1982. 196 с.
23. Скрамтаев Б.Г. Исследование прочности бетона и пластичности бетонной смеси. М.: ЦНИИПС. 1936. 384 с.
24. Берг О.Я., Щербаков Е.Н., Писанко Г.Н. Высокопрочный бетон. М.: Стройиздат, 1971. 490 с.
25. Гвоздев А.А., Яшин А.В., Петрова К.В. и др. Прочность, структурные изменения и деформации бетона. М.: 1978. 197 с.
26. Гвоздев А.А., Дмитриев С.А., Гуца Ю.П. и др. Новое в проектировании бетонных и железобетонных конструкций. М.: 1978. 207 с.
27. Eshelby J. D. The continuum theory of lattice defects. In: *Progress in Solid State Physics*, v. 3 (F. Seitz and D. Turnbull, Eds.). New York: Academic, 1956, 179 p.
28. Kurbatov Y. Problems and possible directions of solving the task of structural-simulation modeling of fiber-reinforced concrete composite. PNRPU. Applied ecology. Urban development. 2017. No. 1. Pp. 126-139. DOI: 10.15593/2409-5125/2017.01.11
29. Kharitonov A.M. Printsipy formirovaniya struktury kompozitsionnykh materialov povyshennoi treshchinostoikosti [Principles of formation the structure of composite materials with increased fracture toughness]. *Tekhnologii betonov*. 2011, no. 3-4, pp. 24-26.
30. Galiev, Ildar & Samakalev, S.S.. (2019). Finite element model of fiber composites. *Modern High Technologies*. 2. 258-263. 10.17513/snt.37801.
31. Cunha, V.M.C.F.; Barros, J.A.O.; Sena Cruz, J.M. (2012). A finite element model with discrete embedded elements for fibre reinforced composites. *Computers & Structures*, Vols. 94–95, 22–33.

Doctor of Science, Professor **Mykola Surianinov**,
PhD, Associate Professor **Stepan Neutov**, Assistant **Viacheslav Surianinov**,
Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa

MATHEMATICAL MODELS OF FIBER CONCRETE

The work is devoted to the development of a mathematical model of fiber concrete with additional dispersed steel fiber reinforcement and a review of other most popular mathematical models. When studying the physical and mechanical properties of fiber concrete, two approaches are used, which are usually used when working with composites - phenomenological and structural. In the first case, the material is considered as some kind of isotropic system to which the methods of the mechanics of a deformable solid body are applicable. At the same time, the characteristics of the material are determined on the basis of laboratory studies and tests using methods of the theory of experiment planning and mathematical statistics. In the second case, a structural analysis is used, which assumes the expression of the mechanical characteristics of the material through similar indicators of its components, the coefficient of fiber reinforcement, the type and geometric

dimensions of the fiber, etc. The authors propose the construction of a mathematical model of fiber concrete based on the determination of its effective stiffness characteristics. Fiber concrete made on the basis of steel fiber with bent ends is considered as the researched material. When building a mathematical model of fiber concrete, it is important to determine its effective properties, which, in turn, implies the procedure for selecting and modeling a representative volume of the material. Equations of the linear theory of elasticity are used to build the model. But, since the considered medium is heterogeneous, the well-known Eshelby principle is taken into account, which allows you to calculate the deformation energy of the system containing inclusions. The dependencies obtained in the work can be used not only for steel fiber fibers, but also for any other (polymeric, glass, etc.), and the specification of the expressions for the effective elastic characteristics will depend exclusively on the geometric shape of the fiber fiber and the type of its deformation. Structural modeling of fiber concrete, finite element models of I.M. Galieva and V'itor M.C.F. Cunha, as well as fiber concrete modeling capabilities in the two most powerful programs - ANSYS and NASTRAN.

Keywords: fiber; steel fiber concrete; composite; mathematical model; Eshelby formula; crack; ANSYS; NASTRAN.

REFERENCES

1. Gediminas Marciukaitis, Remigijus Salna, Bronius Jonaitis, 2011, A model for strength and strain analysis of steel fiber reinforced concrete, *Journal of Civil Engineering and Management*, Vol. 17(1), pp. 137-145. {in English}
2. Buljak, V., Oesch, T., & Bruno, G. (2019). Simulating Fiber-Reinforced Concrete Mechanical Performance Using CT-Based Fiber Orientation Data. *Materials*, 12(5), 717. doi:10.3390/ma12050717. {in English}
3. Congro, M., Sanchez, C.M., Roehl, D., & Marangon, E. (2019). Fracture modeling of fiber reinforced concrete in a multiscale approach. *Composites Part B: Engineering*, 106958. doi: 10.1016/j.compositesb.2019.106958. {in English}
4. Thanh Quang Khai Lam and Thi My Dung Do. Analysis of nonlinear material and steel fiber content in the double layers concrete shell. *AIP Conference Proceedings* 2283, 020008 (2020); <https://doi.org/10.1063/5.0024892>. {in English}
5. Moradi, M., Bagherieh, A.R., & Esfahani, M. R. (2018). Tensile modeling of steel fiber reinforced concrete. *Asian Journal of Civil Engineering*. doi:10.1007/s42107-018-00104-y. {in English}
6. Moradi, M., Bagherieh, A.R., & Esfahani, M.R. (2019). Constitutive modeling of steel fiber-reinforced concrete. *International Journal of Damage Mechanics*, 105678951985115. doi:10.1177/1056789519851159. {in English}

7. Luís A.G. Bitencourt Jr., Osvaldo L. Manzoli, Túlio N. Bittencourt, Frank J. Vecchio. Numerical modeling of steel fiber reinforced concrete with a discrete and explicit representation of steel fibers. *International Journal of Solids and Structures* 159 (2019) 171–190. {in English}
8. Leonovich I.A. Theoretical and practical modeling of elastic and strength properties of fine-grained fiber-reinforced concrete for thin-walled facade elements / I.A. Leonovich, E.I. Batyanovsky // *Construction science and technology*, 2012. No. 1. P. 14–20. {in Russian}
9. Tatiana S.A. Ribeiro, Pedro Serna. Numerical analysis of steel fiber reinforced concrete shells. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2009, Valencia*. {in English}
10. L. Dvorkin, O. Bordiuzhenko, V. Zhitkovsky, V. Marchuk. Mathematical modeling of steel fiber reinforced concrete properties and selecting its effective composition. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering* 708 (2019) 012085 IOP Publishing doi:10.1088/1757-899X/708/1/012085. {in English}
11. Jingu Kang, Kunhwi Kim, Yun Mook Lim, John E. Bolander Modeling of fiber-reinforced cement composites: Discrete representation of fiber pullout. *International Journal of Solids and Structures* 51 (2014) 1970–1979. {in English}
12. Solodovnikov A.S. Numerical modeling of deformation of a physically nonlinear composite with short fibers. *dis. ...cand. physics and mathematics Sciences [Text] / A.S. Solodovnikov; Moscow State University named after M.V. Lomonosov. M.: 2017*. {in Russian}
13. Fernandes de Almeida J., Neves R. Compressive behaviour of steel fibre reinforced concrete // *Structural Concrete*. 2005. T. 2, № 1. C. 1-8. {in English}
14. J. Thomas, A. Ramaswamy. Mechanical Properties of Steel Fiber-Reinforced Concrete // *ASCE Journal of Materials in Civil Engineering*. 2007. T. 19, № 5. C. 385-395. {in English}
15. Gao J., Sun W., Morino K. Mechanical properties of steel fiber reinforced high strength light weight concrete // *Cem. Concr. Compos*. 1997. T. 19. C. 307-313. {in English}
16. K. Sirijaroonchai. A Macro-Scale Plasticity Model for High Performance Fiber Reinforced Cement Composites. Ph.D. thesis: PhD thesis, University of Michigan. 2009. {in English}
17. M. Trub. Numerical Modeling of High Performance Fiber Reinforced Cementitious Composites. Ph.D. thesis: PhD thesis, Institute of Structural Engineering Swiss Federal Institute of Technology. 2011. {in English}
18. Denneman E. Fracture in High Performance Fibre Reinforced Concrete Pavement Materials. Ph.D. thesis: PhD thesis, University of Pretoria. 2011. {in English}

19. Eldeen S.A. Taniguchi T. Modeling of fiber reinforced concrete by the homogenization method // *Journal of the Faculty of Environmental Science and Technology, Okayama University*. 2006. T. 11, № 1. С. 43-49. {in English}
20. Evaluation of Elastic and Viscoelastic Properties of Fiber Reinforced Concrete by Means of a Micromechanical Approach / V.F. Dutra, S. Maghous, A. Filho [и др.] // *11th Pan-American Congress of Applied Mechanics*. 2009. {in English}
21. Li V.C., Wang Y., Becker S. Micromechanical Model of Tension-Softening and Bridging Toughening of Short Random Fiber Reinforced Brittle Matrix Composites // *Journal Mechanics and Physics of Solids*. 1991. T. 39, № 5. С. 607-625. {in English}
22. Zaitsev Yu.V. Modeling of concrete deformations and strength using fracture mechanics methods. M.: 1982. 196 p. {in Russian}
23. Skramtaev B.G. Study of concrete strength and plasticity of concrete mixture. M.: TsNIIPS. 1936. 384 p. {in Russian}
24. Berg O.Ya., Shcherbakov E.N., Pisanko G.N. High strength concrete. M.: Stroyizdat, 1971. 490 p. {in Russian}
25. Gvozdev A.A., Yashin A.B., Petrova K.V. and others. Strength, structural changes and deformations of concrete. M.: 1978. 197 p. {in Russian}
26. Gvozdev A.A., Dmitriev S.A., Guscha Yu.P. etc. New in the design of concrete and reinforced concrete structures. M.: 1978. 207 p. {in Russian}
27. Eshelby J.D. The continuum theory of lattice defects. In: *Progress in Solid State Physics*, v. 3 (F. Seitz and D. Turnbull, Ed.). New York: Academic, 1956, 179 p. {in English}
28. Kurbatov Y. Problems and possible directions of solving the task of structural-simulation modeling of fiber-reinforced concrete composite. PNRPU. Applied ecology. Urban development. 2017. No. 1. Pp. 126-139. DOI: 10.15593/2409-5125/2017.01.11. {in English}
29. Kharitonov A.M. Printsipy formirovaniya struktury kompozitsionnykh materialov povyshennoi treshchinostoikosti [Principles of formation the structure of composite materials with increased fracture toughness]. *Tekhnologii betonov*. 2011, no. 3-4, pp. 24-26. {in English}
30. Galiev, Ildar & Samakalev, S.S. (2019). Finite element model of fiber composites. *Modern High Technologies*. 2. 258-263. 10.17513/snt.37801. {in English}
31. Cunha, V.M.C.F.; Barros, J.A.O.; Sena Cruz, J.M. (2012). A finite element model with discrete embedded elements for fibre reinforced composites. *Computers & Structures*, Vols. 94–95, 22–33. {in English}