

DOI: 10.32347/2786-7269.2024.8.255-273

УДК 621.01

к.т.н., доцент **Задорожний А.О.**,  
zsnj1971@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1031-0585,  
НТУ “Харківський політехнічний інститут”, м. Харків,  
к.т.н., доцент **Човнюк Ю.В.**,  
ychovnyuk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-0608-0203,  
доцент **Чередніченко П.П.**,  
petro\_che@ukr.net, ORCID: 0000-0001-7161-661X,  
к.т.н., доцент **Остапущенко О.П.**,  
olga\_ost\_17@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8114-349X,  
**Кравченко І.М.**, kim-ua@i.ua, ORCID: 0000-0001-7077-1546,  
Київський Національний університет будівництва і архітектури

**АНАЛІЗ ТА СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ РЕЖИМІВ РУХУ  
ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МЕХАНІЗМІВ ГУСЕНИЧНИХ МАШИН.  
Частина I. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ЗА РІЗНИХ  
ІМПУЛЬСНО-СИЛОВИХ ВПЛИВІВ**

*Проведено аналіз режимів руху вантажопідйомних механізмів гусеничних машин. Всебічно досліджені основні параметри вимушених коливань за різних імпульсно-силових впливів. Наведений синтез оптимальних режимів пуску механізмів підйому вантажу, за яких мінімізовані навантаження пружної системи (канатів). Аналіз та синтез оптимальних режимів руху вказаних механізмів реалізований на основі методів класичного варіаційного числення, математичної фізики та моделювання. При цьому використаний апарат сплайн-функцій по часовій координаті. Особливістю побудови фізико-математичної моделі механізму підйому вантажу гусеничних машин є те, що, на відміну від існуючих підходів до розв'язку подібних задач, у данному дослідженні аналіз та синтез оптимальних режимів руху здійснений за зрозумілих початкових та кінцевих (термінальних) умов, які є фізично зрозумілими, мають фізичний зміст, оскільки у вказаних умовах фігурує силовий фактор – причина виникнення таких рухів, а також існує причинно-наслідковий зв'язок – рух системи «вантаж – канат – приводний механізм машини» зі сталою швидкістю після закінчення перехідного процесу (пуску), що відповідає першому закону Ньютона. Крім того, в роботі встановлені основні параметри таких рухів вантажопідйомного механізму, за яких мінімізовані питома (на одиницю приведеної маси система) інерційна сила та її похідні по часу (до другого порядку), що дозволяє суттєво зменшити можливість виникнення*

небажаних коливань у системі, динамічні навантаження, а також уникнути аварійних ситуацій при переміщенні вантажів.

*Ключові слова:* аналіз; синтез; оптимальні режими руху; вантажопідйомні механізми; гусеничні машини; вимушені коливання; імпульсно-силові впливи; сплайн функції; динамічні навантаження; пружні системи (канати).

**Постановка проблеми.** Підвищення продуктивності та надійності, а також зменшення енергетичних втрат механічних систем – це один з основних стратегічних напрямків підвищення ефективності виробничих процесів. На продуктивність та надійність механічних систем суттєвий вплив мають динамічні навантаження, які виникають у цих системах під час руху. Вибір режимів руху механічних систем, які до мінімуму зводять динамічні навантаження, можливий лише при використанні методів теорії оптимального керування рухом при наявності узагальнених динамічних критеріїв. Саме цілеспрямований вибір режимів руху та режимних параметрів дозволяє до мінімуму звести динамічні навантаження, а також знизити енергетичні витрати та використати приводний механізм найменшої потужності.

Задля оптимізації режимів руху та режимних параметрів зазвичай необхідна кількісна оцінка перехідних процесів (пуск, гальмування, реверсування тощо), і усталеного режиму руху за весь цикл руху механічної системи у вигляді одного критерію чи системи критеріїв. При цьому доцільно використати локальні та інтегральні динамічні критерії, отримані на основі функціоналу дії та варіаційних принципів механіки. Можливим є й використання у подібних ситуаціях енергетичних критеріїв. Саме ці критерії відображають небажані властивості (витрати енергії, дію динамічних навантажень, коливання ланок тощо), якими характеризується динамічна система під час руху, а тому вони підлягають мінімізації. Інтегральні функціонали (критерії) зазвичай залежать від різних функцій та параметрів режимів руху. Відповідний вибір цих залежностей і параметрів дозволяє мінімізувати функціонали і поліпшити ті чи інші властивості механічної системи.

Мінімізація функціоналів пов'язана з розв'язанням варіаційної задачі динаміки руху механічної системи. Математичний розв'язок цієї задачі зводиться до крайової задачі, яка, у загальному випадку, визначається системою нелінійних диференціальних рівнянь Ейлера-Пуассона, рівняннями руху та термінальними умовами руху механічної системи. У деяких часткових випадках можна отримати аналітичний розв'язок цієї задачі, однак, для розв'язку більшості практичних задач необхідно використовувати чисельні методи.

Складність чисельного розв'язку крайової задачі полягає у тому, що початкові умови, які необхідні для початку процесу інтегрування, не завжди задані, відомі лише відповідні крайові умови на різних кінцях. Чисельне інтегрування є досить складною задачею, оскільки, довільно задаючи початкові умови, дивимось, як задовольняються відомі умови на іншому кінці. Не дивлячись на значні можливості комп'ютерної техніки, розв'язок крайових задач чисельними методами займає значну частину часу, оскільки важко встановити пряму залежність між змінними початковими умовами та кінцевими похибками в отриманому розв'язку на іншому кінці.

**Аналіз публікацій по темі дослідження.** Для усунення недоліків, зазначених вище, щодо розв'язку варіаційних задач автори [1-11] використовують прямі варіаційні методи. Ці, відомі у літературі методи, не завжди можуть бути використані для оптимізації режимів руху механічних систем, виходячи з умов складності, точності, громіздкості, тривалості розв'язку задач оптимізації режимів руху механічних систем.

У даній роботі запропонований вдосконалений прямий варіаційний метод, який є досить простим у розрахунках і забезпечує необхідну точність для інженерних розрахунків режимів руху механічних систем, які моделюють функціонування вантажопідйомних механізмів гусеничних машин.

**Мета роботи** полягає у обґрунтуванні вдосконаленого прямого варіаційного методу розв'язку задач оптимізації режимів руху механізмів підйому вантажу гусеничних машин на стадії їх пуску. При цьому можливою стає мінімізація динамічних навантажень на канатну систему, суттєво зменшуються небажані коливання вантажу й враховані силові фактори, які спричинили рух.

**Виклад основного змісту дослідження.**

1. Вплив режимів пуску на динамічні навантаження у пружних елементах механізму підйому вантажу (канатах).

Задля аналізу впливу режимів пуску на динамічні навантаження, які виникають у пружних елементах механізму підйому вантажу, тобто у канатах, розглянемо (у першому наближенні) двомасову модель механізму підйому крана (рис.1). На цьому рисунку прийняті наступні позначення:  $(m, m_1)$  – зведені до підйомного каната маси відповідно вантажу та приводного механізму з барабаном;  $(x, x_1)$  – узагальнені координати відповідно мас  $m$  та  $m_1$ ;  $\bar{F}_1$  та  $\bar{F}_2$  – рушійна сила приводу і вага вантажу, зведені до вантажного каната;  $c$  – жорсткість каната.

Рівняння руху розглянутої моделі механізму підйому вантажу мають вигляд:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = F - c \cdot (x_1 - x); \\ m_1 \ddot{x} = c \cdot (x_1 - x) - F_2. \end{cases} \quad (1)$$

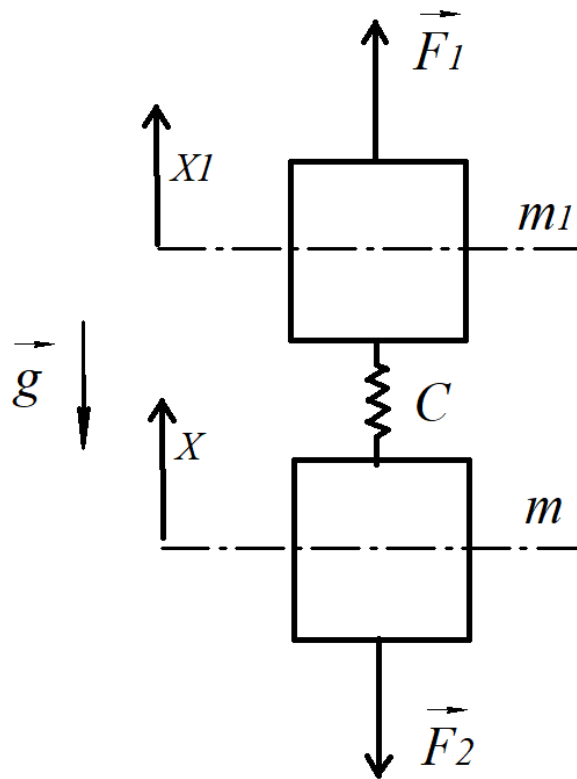


Рис.1. Двомасова динамічна модель механізму підйому крану.

Зведемо систему диференціальних рівнянь другого порядку (1) до одного рівняння для змінної  $\xi = x_1 - x$  теж другого порядку:

$$\ddot{\xi} + k^2 \xi = \frac{F_1}{m_1} + \frac{F_2}{m}, \quad (2)$$

де:  $k^2 = \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{m_1} \right) \cdot c$ . У загальному випадку  $F_1 = F_1(t)$ ,  $F_2 = F_2(t)$  (хоча часто  $\vec{F}_2 = m\vec{g}$ , де  $\vec{g}$  – прискорення вільного падіння). Якщо ввести позначення приведеної маси досліджуваної механічної системи:

$$M = \frac{m \cdot m_1}{(m + m_1)}, \quad (3)$$

тоді можна подати (2) у наступному вигляді:

$$\ddot{\xi} + k^2 \xi = \frac{(F_1 m + F_2 m_1)}{(m_1 + m) \cdot M}, \quad k^2 = \frac{c}{M}. \quad (4)$$

У подальшому будемо розглядати рівняння руху даної системи у наступній формі:

$$\ddot{\xi} + k^2 \xi = \frac{F(t)}{M}, \quad (5)$$

$$\text{де: } F(t) = \frac{(F_1(t)m + F_2(t)m_1)}{(m_1 + m)}.$$

Таким чином, вільні коливання у даній механічній системі відбуваються з частотою  $k$ , а вимушені коливання – під впливом узагальненої сили  $F(t)$ , де  $t$  – час.

Рівняння руху (5) можна легко проінтегрувати у загальному вигляді за довільної вимушеної сили  $F(t)$ . Це легко зробити, якщо покласти:

$$\tilde{\xi} = \dot{\xi} + ik\xi, \quad i^2 = -1. \quad (6)$$

Тоді рівняння (5) другого порядку стане диференціальним рівнянням для  $\tilde{\xi}$  першого порядку. Маємо:

$$\frac{d\tilde{\xi}}{dt} - ik\tilde{\xi} = \frac{1}{M} \cdot F(t). \quad (7)$$

Розв'язок (7) набуває вигляду:

$$\tilde{\xi} = \exp(ikt) \cdot \left\{ \int_0^t \frac{1}{M} \cdot F(t) \cdot \exp(-ikt) dt + \tilde{\xi}_0 \right\}, \quad (8)$$

де:  $\tilde{\xi}_0$  – постійна, яка обрана таким чином, щоб являти собою значення  $\tilde{\xi}$  у момент часу  $t=0$ . Це і є шуканий загальний розв'язок (7). Функція  $\xi(t)$  дається уявною частиною виразу (8) (яка поділена на  $ik$ ). При цьому зрозуміло, що сила  $F(t)$  повинна бути записана у дійсній формі (у вигляді дійсної функції від  $t$ ).

Визначимо далі за нульових початкових умов ( $\xi(t)|_{t=0} = 0, \dot{\xi}(t)|_{t=0} = 0$ ) вимушені коливання системи під впливом сили  $F(t)$  з рівняння (5).

Отже, для будь-якого закону  $F(t)$  маємо:

$$\xi(t) = \frac{\text{Im} \tilde{\xi}}{ik}. \quad (9)$$

Зазвичай,  $F_2(t) = mg$ , тому:

$$F(t) = \frac{F_1(t) \cdot m + m \cdot g \cdot m_1}{(m_1 + m)} = \frac{F_1(t) \cdot m}{(m_1 + m)} + Mg. \quad (10)$$

1.1. Розглянемо силовий режим роботи механізму підйому вантажу, за якого режим руху приводного механізму відбувається за сталого значення прискорення  $a$ , котре визначається зі співвідношення :

$$a = \frac{v_c}{t_p}, \quad (11)$$

де:  $v_c$  – стала швидкість підйому вантажу,  $t_p$  – тривалість пуску.

Для силового режиму пуску маємо:

$$F(t) = \frac{m_1 \cdot a \cdot m}{(m_1 + m)} + Mg = M(a + g). \quad (12)$$

Для  $\xi(t)$  у цьому випадку маємо:

$$\xi(t) = \frac{M(a + g)}{M \cdot k^2} \cdot (1 - \cos kt) = \frac{(a + g)}{k^2} \cdot 2 \cdot \sin^2\left(\frac{kt}{2}\right). \quad (13)$$

Для  $F_{\text{пружн.}}$  – сили, яка виникає у вигляді пружної сили у канаті механізму підйому вантажу, маємо:

$$F_{\text{пружн.}} = c\xi(t) = \frac{c(a + g)}{k^2} \cdot 2 \cdot \sin^2\left(\frac{kt}{2}\right). \quad (14)$$

Коефіцієнт динамічних навантажень у цьому випадку набуває наступного значення:

$$k_{\text{дин.}} = \frac{F_{\text{пружн.}}}{M(a + g)} = \frac{c(a + g)}{k^2 \cdot M(a + g)} \cdot 2 \cdot \sin^2\left(\frac{kt}{2}\right) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{kt}{2}\right). \quad (15)$$

Цей коефіцієнт досягає максимального значення  $k_{\text{дин.}}^{(\max)} = 2$  у моментах часу  $t_n^*$ :

$$t_n^* = \frac{(2n + 1) \cdot \pi}{k}, \quad n = 0; 1; 2; 3; \dots \quad (16)$$

Якщо  $t_p > t_n^*$ , тоді ситуації можуть призвести до перевантаження канатної системи механізму підйому вантажу і, як наслідок, до можливості виникнення аварійної ситуації (розриву канату).

1.2.  $F_1(t) = F_0 \exp(-\alpha t)$ , де  $\alpha$  – коефіцієнт, що характеризує згасання сили, прикладеної до приводного механізму, з плином часу.

У цьому випадку для  $F(t)$  маємо:

$$F(t) = \frac{F_0 \exp(-\alpha t) \cdot m}{(m_1 + m)} + Mg. \quad (17)$$

Пружна сила, яка виникає у канаті, набуває вигляду функції від  $t$  коливного характеру зі спадаючою (при збільшенні  $t$ ) амплітудою:

$$F_{\text{пружн.}}(t) = \frac{cg}{k^2} \cdot (1 - \cos kt) + \frac{F_0 c}{M(k^2 + \alpha^2)} \cdot \left\{ \exp(-\alpha t) - \cos kt + \frac{\alpha}{k} \sin kt \right\}. \quad (18)$$

1.3.  $F_1(t) = bt$ ,  $b > 0$ , де  $b$  – коефіцієнт, який характеризує швидкість зростання у часі  $t$  прикладеної до приводного механізму сили.

У цьому випадку для  $F(t)$  маємо:

$$F(t) = \frac{b \cdot t \cdot m}{(m_1 + m)} + Mg. \quad (19)$$

Пружна сила, яка виникає у канаті, зростає з плином часу  $t$  і має коливний характер:

$$F_{\text{пружн.}}(t) = \frac{cg}{k^2} \cdot (1 - \cos kt) + \frac{bc}{Mk^3} \cdot (kt - \sin kt). \quad (20)$$

1.4.  $F_1(t) = F_0 \exp(-\alpha t) \cdot \cos \beta t$ , тобто сила, прикладена до приводного механізму підйому вантажу, має коливний характер з експоненціально спадною амплітудою.

У цьому випадку для  $F(t)$  маємо:

$$F(t) = \frac{F_0 \cdot \exp(-\alpha t) \cdot \cos \beta t \cdot m}{(m_1 + m)} + Mg. \quad (21)$$

Для  $F_{\text{пружн.}}$  можна отримати наступне співвідношення:

$$F_{\text{пружн.}} = \frac{cF_0}{M \left[ (k^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 \right]} \cdot \left\{ -(k^2 + \alpha^2 - \beta^2) \cos kt + \frac{\alpha}{k} (k^2 + \alpha^2 - \beta^2) \sin kt + \exp(-\alpha t) \cdot \left[ (k^2 + \alpha^2 - \beta^2) \cos \beta t - 2\alpha\beta \sin \beta t \right] \right\} + \frac{cg}{k^2} \cdot (1 - \cos kt). \quad (22)$$

Отже,  $F_{\text{пружн.}}(t)$  й у цьому випадку має коливний характер зі спадною у часі  $t$  амплітудою.

У подальшому розглянемо випадки прикладання до приводного механізму сили  $F_1(t)$ , котра має імпульсивний характер, тобто швидкозмінна у часі з коротким інтервалом дії (який може бути навіть менше, ніж  $t = t_p$ ). При цьому задля визначення  $\xi(t)$  й  $F_{\text{пружн.}}(t)$  будемо використовувати відомий у науковій літературі метод припасовування.

1.5. Нехай сила  $F_1(t)$  змінюється за законом:

$F_1 = 0$ , при  $t < 0$ ;  $F_1 = F_0 \cdot t/T$ , при  $0 < t < T$ ;  $F_1 = F_0$ , при  $t > T$  (рис.2); до моменту  $t = 0$  система знаходиться у положенні рівноваги.

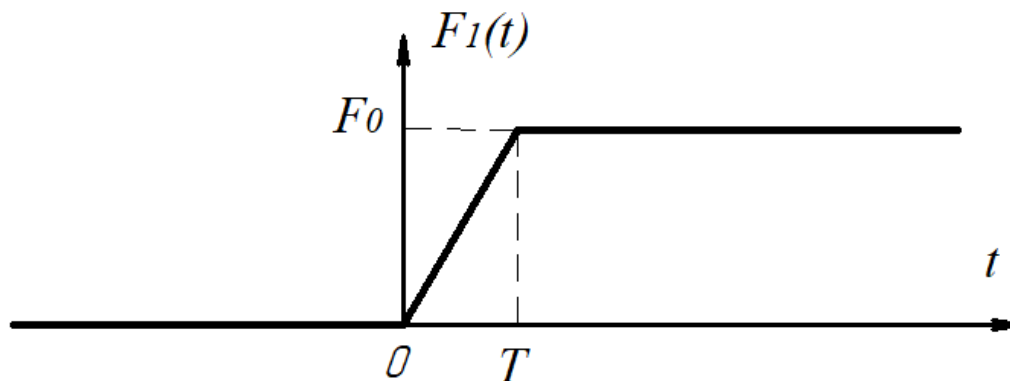


Рис.2. Закон зміни у часі сили  $F_1(t)$ .



У інтервалі часу  $0 < t < T$  коливання, які задовольняють нульовим початковим умовам, мають вигляд:

$$\xi(t) = \frac{g}{k^2} \cdot (1 - \cos kt) + \frac{F_0}{Mk^3T} \cdot (kt - \sin kt). \quad (23)$$

При  $t > T$  роз'язок шукаємо у вигляді:

$$\xi(t) = C_1 \cdot \cos(k[t - T]) + C_2 \cdot \sin(k[t - T]) + \frac{F_0}{Mk^2} + \frac{g}{k^2}. \quad (24)$$

З умов неперервності  $\xi$  та  $\dot{\xi}$  при  $t = T$  знайдемо:

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{g}{k^2} \cdot \cos kT - \frac{F_0}{Mk^3T} \cdot \sin kT; \\ C_2 = \frac{g}{k^2} \cdot \sin kT + \frac{F_0}{Mk^3T} \cdot (1 - \cos kT). \end{cases} \quad (25)$$

Відповідно для  $F_{\text{пружн.}}(t)$  при  $t > T$  маємо:

$$F_{\text{пружн.}}(t) = c \cdot \xi(t) = c \cdot \left\{ C_1 \cos[k(t - T)] + C_2 \sin[k(t - T)] + \frac{F_0}{Mk^2} + \frac{g}{k^2} \right\}. \quad (26)$$

При цьому амплітуда коливань:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \left\{ \frac{g^2}{k^4} + \left( \frac{F_0}{Mk^3T} \right)^2 \cdot 4 \sin^2 \left( \frac{kT}{2} \right) + 2 \frac{gF_0}{Mk^5T} \sin kT \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (27)$$

Слід зазначити, що амплітуда коливань  $A$  буде тим менше, чим «повільніше» вмикається сила  $F_0$  (тобто, чим більше  $T$ ).

1.6. Нехай сила  $F_1(t)$  змінюється за законом:  $F_1(t) = F_0$ , при  $0 < t < T$ ;  $F_1(t) = 0$ , при  $t < 0, t > T$  (рис.3).

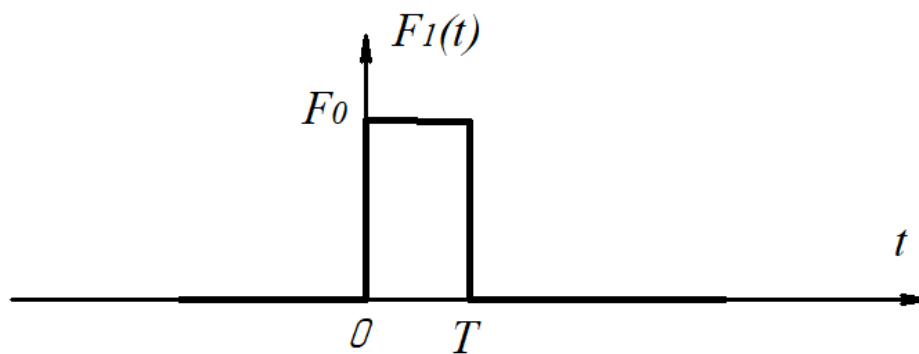


Рис.3. Закон зміни у часі  $F_1(t)$ .

Розв'язок для цього випадку можна знайти методом припасовування. При  $t > T$  маємо вільні коливання системи навколо положення  $\xi = 0$ ; при цьому:

$$\xi(t) = \frac{g}{k^2} \cdot (1 - \cos kt) + \frac{\text{Im} \tilde{\xi}}{ik}, \quad (28)$$

де:



$$\ddot{\xi} = \frac{F_0 \cdot (1 - \exp(-ikT))}{ikM} \cdot \exp(ikt). \quad (29)$$

Для пружної сили  $F_{\text{пружн.}}(t)$  маємо:

$$F_{\text{пружн.}}(t) = \frac{cg}{k^2} \cdot (1 - \cos kt) + \frac{F_0 c}{k^2 M} \cdot \{ \cos[k(t-T)] - \cos kt \}. \quad (30)$$

1.7. Нехай сила  $F_1(t)$  змінюється за законом:  $F_1(t) = \frac{F_0 t}{T}$ , при  $0 < t < T$ ,  $F_1(t) = 0$ , при  $t < 0, t > T$  (рис.4).

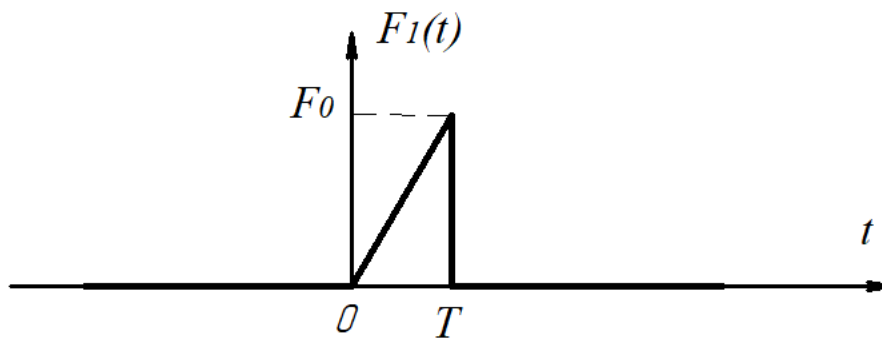


Рис.4. Закон зміни у часі сили  $F_1(t)$ .

$$\begin{aligned} \xi(t) = & \frac{g}{k^2} \cdot (1 - \cos kt) + \\ & + \frac{F_0}{mT} \cdot \left\{ \left( \frac{T}{k^2} \cos kT - \frac{1}{k^3} \sin kT \right) \cdot \cos kt + \left( \frac{T}{k^2} \sin kT - \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^3} \cos kT \right) \sin kt \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Для пружної сили  $F_{\text{пружн.}}(t)$  маємо:

$$\begin{aligned} F_{\text{пружн.}}(t) = & \frac{cg}{k^2} \cdot (1 - \cos kt) + \frac{cF_0}{mT} \cdot \left\{ \left( \frac{T}{k^2} \cos kT - \frac{1}{k^3} \sin kT \right) \cdot \cos kt + \right. \\ & \left. + \left( \frac{T}{k^2} \sin kT - \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^3} \cos kT \right) \cdot \sin kt \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

## 2. Синтез оптимальних режимів руху вантажопідійомних механізмів гусеничних машин за різних кінематично-силових критеріїв.

Рівняння руху досліджуваної системи після нескладних перетворень можна подати у наступному вигляді:

$$\ddot{\xi} + \Omega^2 \cdot \xi = \frac{F(t)}{M}, \quad (33)$$

$$\text{де: } M = \frac{m \cdot m_1}{m_1 + m}, \quad F(t) = \frac{F_1(t) \frac{m}{m_1} + F_2(t)}{(1 + m/m_1)}, \quad \Omega^2 \equiv k^2 = c \cdot \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m} \right).$$

Оскільки, як правило,  $F_2(t) = mg$ , де  $g$  – прискорення вільного падіння, тоді для  $F(t)$  маємо наступне співвідношення:

$$F(t) = \frac{F_1(t) \cdot \frac{m}{m_1} + mg}{(1 + m/m_1)}, \quad \Omega^2 = \frac{c}{M}. \quad (34)$$

Розглянемо далі кілька можливих рухів даної системи, за яких виконуються певні критерії якості цих рухів, пов'язані з кінематично-силовими характеристиками цієї механічної системи у період пуску останньої.

2.1. Режим руху системи, за якого у період пуску мінімізована величина питомої (на одиницю приведеної маси  $M$ ) середньоквадратичної сили інерції, тобто виконується наступний критерій якості руху:

$$I_1 = \left\{ \frac{1}{\tau_n} \cdot \int_0^{\tau_n} (\ddot{\xi})^2 dt \right\}^{1/2} \rightarrow \min, \quad (35)$$

де:  $\tau_n$  – тривалість процесу пуску даної механічної системи.

Необхідною умовою реалізації критерію якості руху (35) є наступне диференціальне рівняння Ейлера-Пуассона:

$$\xi^{(IV)} = 0. \quad (36)$$

Розв'язок рівняння (36) шукаємо у вигляді сплайна по  $t$  третього порядку:

$$\xi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad (37)$$

де:  $a_{0,1,2,3}$  – константи, котрі розшукуємо з наступних термінальних (початкових і кінцевих) умов, що включають силовий фактор, тобто причину, яка призводить до появи подібного руху та наслідків, а саме: переходу механічної системи (вантажу на канаті, зокрема) у режим руху з постійною швидкістю підйому вантажу ( $V_c$ ) після закінчення періоду пуску (тобто, при  $t \geq \tau_n$ ), – маємо:

$$\xi|_{t=0} = \dot{\xi}|_{t=0} = 0; \quad \ddot{\xi}|_{t=0} = \frac{F(0)}{M}; \quad \ddot{\xi}|_{t=\tau_n} = 0, \quad t_n \equiv \tau_n. \quad (38)$$

Враховуючи (37), з умов (38) маємо:

$$a_0 = a_1 = 0; \quad a_2 = \frac{F(0)}{2M}; \quad a_3 = \frac{[-F(0)]}{6Mt_n}. \quad (39)$$

Тоді для  $\xi(t)$ , яке задовольняє критерію якості руху (35), маємо:

$$\xi(t) = \frac{F(0)}{2M} \cdot t^2 - \frac{F(0)}{6Mt_n} \cdot t^3. \quad (40)$$

Знаючи закон руху  $\xi(t)$  (40), можна встановити закон руху вантажу на канаті двічі інтегруючи по часу  $t$  (за нульових початкових умов:  $x|_{t=0} = \dot{x}|_{t=0} = 0$ ) рівняння руху маси вантажу ( $m$ ):

$$\ddot{x} = \frac{c}{m} \cdot \xi(t) - g. \quad (41)$$

При цьому отримаємо:

$$x(t) = \frac{c}{m} \cdot \left\{ \frac{F(0)}{24M} \cdot t^4 - \frac{F(0)}{120Mt_n} \cdot t^5 \right\} - \frac{gt^2}{2}. \quad (42)$$

Оскільки  $\ddot{x}|_{t=\tau_n} = 0$ , тоді з (41) маємо:

$$t_n = \tau_n = \left\{ \frac{3mMg}{c \cdot F(0)} \right\}^{1/2}. \quad (43)$$

Крім того, можна для цього режиму руху визначити  $|V_c|$ :

$$|V_c| = \left| \frac{c}{m} \cdot \frac{F(0)}{8m} \cdot t_n^3 - gt_n \right| = \left\{ \frac{3Mmg}{c \cdot F(0)} \right\}^{1/2} \cdot \left( \frac{5}{8} g \right). \quad (44)$$

2.2. Режим руху системи, за якого у період пуску мінімізована величина питомої (на одиницю приведеної маси  $M$ ) середньоквадратичної швидкості зміни сили інерції (різкості), тобто виконується наступний критерій якості руху:

$$I_2 = \left\{ \frac{1}{\tau_n} \cdot \int_0^{\tau_n} (\ddot{\xi})^2 dt \right\}^{1/2} \rightarrow \min, \quad (45)$$

для котрого необхідною умовою реалізації є наступне диференціальне рівняння Ейлера-Пуассона:

$$\xi^{(IV)} = 0. \quad (46)$$

Розв'язок рівняння (46) шукаємо у вигляді сплайна по  $t$  п'ятого порядку:

$$\xi(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5, \quad (47)$$

де:  $b_0, b_i, i = (\overline{1,5})$ , – константи, котрі розшукуємо з наступних термінальних умов:

$$\xi|_{t=0} = \dot{\xi}|_{t=0} = 0; \quad \ddot{\xi}|_{t=0} = \frac{F(0)}{M}; \quad \ddot{\xi}|_{t=\tau_n} = 0; \quad \ddot{\xi}|_{t=\tau_n} = 0; \quad \xi^{(IV)}|_{t=\tau_n} = 0. \quad (48)$$

Враховуючи (47) з умов (48) маємо:

$$\begin{cases} b_0 = b_1 = 0; & b_2 = \frac{F(0)}{2M}; & b_3 = -\frac{F(0)}{M\tau_n}; & b_4 = \frac{F(0)}{2M\tau_n^2}; \\ b_5 = -\frac{F(0)}{10M\tau_n^3}. \end{cases} \quad (49)$$

Таким чином, закон руху  $\xi(t)$  для критерію якості  $I_2$  (45) має вигляд:

$$\xi(t) = \frac{F(0)}{2M} \cdot t^2 - \frac{F(0)}{M \cdot \tau_n} \cdot t^3 + \frac{F(0)}{2M \cdot \tau_n^2} \cdot t^4 - \frac{F(0)}{10M \cdot \tau_n^3} \cdot t^5. \quad (50)$$

Закон руху вантажу  $x(t)$  для  $\xi(t)$  (50) має вигляд:

$$x(t) = \frac{c}{m} \cdot \left\{ \frac{F(0)}{M} \cdot \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{\tau_n} + \frac{t^4}{2\tau_n^2} - \frac{t^5}{10\tau_n^3} \right] \right\} - \frac{gt^2}{2}. \quad (51)$$

2.3. Режим руху системи, за якого у період пуску мінімізована величина питомої (на одиницю приведенної маси  $M$ ) середньоквадратичної швидкості зміни у часі різкості сили інерції, тобто виконується у наступний критерій якості руху:

$$I_3 = \left\{ \frac{1}{\tau_n} \cdot \int_0^{\tau_n} (\xi^{(IV)})^2 dt \right\}^{1/2} \rightarrow \min. \quad (52)$$

Для  $I_3$  необхідною умовою реалізації є наступне диференціальне рівняння Ейлера-Пуассона:

$$\xi^{(VIII)} = 0. \quad (53)$$

Розв'язок рівняння (53) шукаємо у вигляді сплайна по  $t$  сьомого порядку:

$$\xi(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 + d_4 t^4 + d_5 t^5 + d_6 t^6 + d_7 t^7. \quad (54)$$

Величини коефіцієнтів  $d_0, d_j, j = (\overline{1,7})$ , розшукуємо з наступних термінальних умов:

$$\xi|_{t=0} = \dot{\xi}|_{t=0} = 0; \quad \ddot{\xi}|_{t=0} = \frac{F(0)}{M}; \quad \ddot{\xi}|_{t=\tau_n} = \ddot{\xi}|_{t=\tau_n} = \xi^{(IV)}|_{t=\tau_n} = \xi^{(V)}|_{t=\tau_n} = \xi^{(VI)}|_{t=\tau_n} = 0. \quad (55)$$

Враховуючи (54) з умов (55) маємо:

$$d_0 = d_1 = 0; \quad d_2 = \frac{F(0)}{2M}. \quad (56)$$

Коефіцієнти  $d_{3,4,5,6,7}$  знаходимо за правилом Крамера з наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3d_3\tau_n + 6d_4\tau_n^2 + 10d_5\tau_n^3 + 15d_6\tau_n^4 + 21d_7\tau_n^5 = -d_2; \\ d_3 + 4d_4\tau_n + 10d_5\tau_n^2 + 20d_6\tau_n^3 + 35d_7\tau_n^4 = 0; \\ d_4 + 25d_5\tau_n + 15d_6\tau_n^2 + 35d_7\tau_n^3 = 0; \\ d_5 + 6d_6\tau_n + 21d_7\tau_n^2 = 0; \\ d_6 + 7d_7\tau_n = 0. \end{cases} \quad (57)$$

Тоді  $\xi(t)$  для критерію якості руху  $I_3$  (52) має вигляд:

$$\xi(t) = \frac{F(0)}{2M} \cdot t^2 + d_3 \cdot t^3 + d_4 \cdot t^4 + d_5 \cdot t^5 + d_6 \cdot t^6 + d_7 \cdot t^7. \quad (58)$$

Для нульових початкових умов закон руху вантажу при цьому набуває наступного вигляду:

$$x(t) = \frac{c}{m} \left\{ \frac{F(0)}{24M} \cdot t^4 + \frac{d_3}{20} \cdot t^5 + \frac{d_4}{30} \cdot t^6 + \frac{d_5}{42} \cdot t^7 + \frac{d_6}{56} \cdot t^8 + \frac{d_7}{72} \cdot t^9 \right\} - \frac{gt^2}{2}. \quad (59)$$

2.4. Режим руху системи, за якого мінімізована величина пружної сили у канатній системі підйому вантажу у період пуску вантажопідйомного механізму гусеничної системи.

З рівняння (33) легко визначити величину пружної сили, що виникає у канатній системі механізму підйому вантажу:

$$F_{\text{пружн.}}(t) = c\xi(t) = c \cdot \frac{1}{\Omega^2} \cdot \left( \frac{F(t)}{M} - \ddot{\xi} \right). \quad (60)$$

Оскільки у процесі підйому вантажу виникають коливні процеси у канатній системі ( $F_{\text{пружн.}}$  змінює свій знак), тоді доцільно у якості критерія оптимальності такого руху обрати наступний (для середньоквадратичного значення  $F_{\text{пружн.}}(t)$  за період пуску  $t \in [0; \tau_n]$ ):

$$I_4 = \left\{ \frac{1}{\tau_n} \cdot \int_0^{\tau_n} (c \cdot \xi(t)^2) dt \right\}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \min. \quad (61)$$

Враховуючи (60), подамо (61) у наступному вигляді:

$$I_4 = \left\{ \frac{1}{\tau_n} \cdot \frac{c^2}{\Omega^4} \int_0^{\tau_n} \left[ \frac{F(t)}{M} - \ddot{\xi} \right]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \min. \quad (62)$$

Необхідною умовою реалізації критерію  $I_4$  (62) є наступне рівняння Ейлера-Пуассона:

$$\xi^{(IV)} = \frac{\ddot{F}(t)}{M}. \quad (63)$$

Враховуючи вираз  $F(t)$  з (34) рівняння, (63) можна подати наступним чином:

$$\xi^{(IV)} = \frac{\ddot{F}(t)}{m_1}. \quad (64)$$

Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (64) будемо шукати для випадку дії вимушеної сили (її збурення), котре задовольняє умовам гладкості функції  $F_1(t)$  у пусковий період ( $t \in [0; \tau_n]$ ):

$$\tilde{I} = \left\{ \frac{1}{\tau_n} \cdot \int_0^{\tau_n} \left[ \frac{\ddot{F}(t)}{m_1} \right]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \min, \quad (65)$$

тобто мінімізації у вказаний період часу середньоквадратичного значення функції  $\ddot{F}_1(t)/m_1$ .

Необхідною умовою реалізації критерію  $\tilde{I}$  (65) є рівняння Ейлера-Пуассона:

$$F_1^{(IV)}(t) = 0, \quad (66)$$

розв'язок якого шукаємо у класі функцій, котрі є сплайнами по  $t$  третього порядку, за наступних термінальних умов у періоді пуску механічної системи підйому вантажу:

$$F_1(t)|_{t=0} = \dot{F}_1(t)|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{dF_1}{dt} \right|_{t=\tau_n} = 0; \quad F_1(t)|_{t=\tau_n} = F_0, \quad (67)$$

де:  $F_0$  – амплітуда сили рушійної приводу, яка реалізується у кінці етапу розгону системи, тобто при  $t \geq \tau_n$  і у подальшому при підйомі вантажу ( $t > \tau_n$ ) не змінюється ( $F_0 = const$ ). Саме такий закон зміни у часі  $F_1(t)$  дозволяє, на думку авторів даного дослідження, мінімізувати можливість виникнення коливань та суттєво зменшити коефіцієнт динамічності ( $k_{дин}(t)$ ), який діє на канатну систему механізму підйому вантажу гусеничних машин.

Враховуючи (67), з виразу для  $F_1(t)$ :

$$F_1(t) = e_0 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3, \quad (68)$$

де:  $e_{0,1,2,3}$  – сталі коефіцієнти, легко знаходимо їх значення:

$$e_0 = 0; \quad e_1 = 0; \quad e_2 = \frac{3F_0}{t_n^2}; \quad e_3 = -\frac{2F_0}{t_n^3}. \quad (69)$$

Тому закон зміни у часі  $F_1(t)$  набуває вигляду:

$$F_1(t) = \frac{3F_0}{t_n^2} \cdot t^2 - \frac{2F_0}{t_n^3} \cdot t^3. \quad (70)$$

Графік залежності  $F_1(t)$  (70) наведений на рис.5.

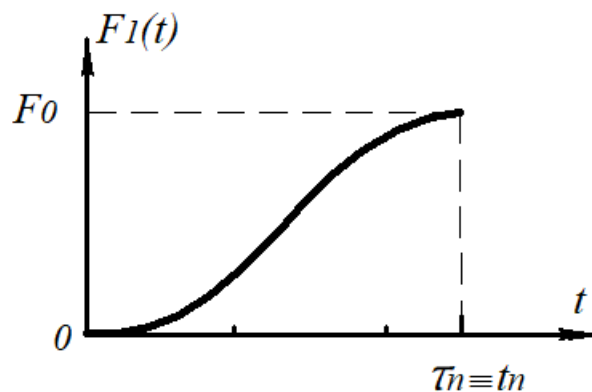


Рис.5. Залежність  $F_1(t)$ .

Отже, слід розв'язати рівняння:

$$\xi^{(IV)}(t) = \frac{1}{m_1} \cdot \left\{ \frac{6F_0}{t_n^2} - \frac{12F_0}{t_n^3} \cdot t \right\}. \quad (71)$$

Розв'язок (71) шукаємо у вигляді суми двох складових:

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t), \quad (72)$$

де:  $\xi_1(t)$  – розв’язок однорідного рівняння (71) (з правою частиною, котра дорівнює нулю), а  $\xi_2(t)$  – частинний розв’язок рівняння (71). Маємо:

$$\xi_1(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3, \quad (73)$$

де:  $A_{0,1,2,3}$  – константи,

$$\xi_2(t) = \frac{F_0}{m_1 \cdot t_n^2} \cdot \frac{t^4}{4} - \frac{F_0 \cdot t^5}{m_1 \cdot t_n^3 \cdot 10}. \quad (74)$$

Для визначення констант  $A_0, A_1, A_2, A_3$  слід використати наступні термінальні умови:

$$\xi|_{t=0} = \dot{\xi}|_{t=0} = 0; \quad \ddot{\xi}|_{t=0} = \frac{F(0)}{M}; \quad \ddot{\xi}|_{t=t_n} = 0. \quad (75)$$

Тоді для вказаних вище коефіцієнтів можна знайти наступні співвідношення:

$$A_0 = 0; \quad A_1 = 0; \quad A_2 = \frac{F(0)}{2M}; \quad A_3 = \frac{1}{6t_n} \cdot \left\{ -\frac{F(0)}{M} - \frac{F_0}{m_1} \right\}. \quad (76)$$

Остаточно, закон руху  $\xi(t)$ , за якого виконується критерій якості руху  $I_4$  (62) та одночасно реалізується силовий критерій  $\tilde{I}$  (65), має наступний вигляд:

$$\xi(t) = \frac{F(0)}{2M} \cdot t^2 - \frac{1}{6t_n} \cdot \left[ \frac{F(0)}{M} - \frac{F_0}{m_1} \right] \cdot t^3 + \frac{F_0}{m_1 \cdot t_n^2} \cdot \frac{t^4}{4} - \frac{F_0}{m_1 \cdot t_n^3} \cdot \frac{t^5}{10}. \quad (77)$$

Враховуючи (34),  $F(0)$  можна подати наступним чином:

$$F(0) = \frac{mg}{(1 + m/m_1)}. \quad (78)$$

Отже, для  $\xi(t)$  (77) маємо (з урахуванням (78)):

$$\xi(t) = \frac{mg}{(1 + m/m_1)} \cdot \frac{1}{M} \cdot \left\{ \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6t_n} \right\} + \frac{F_0}{m_1} \cdot \left\{ \frac{t^4}{4t_n^2} - \frac{t^5}{10t_n^3} \right\}. \quad (79)$$

Закон руху вантажу  $x(t)$  за відомого  $\xi(t)$  (79) знаходимо двічі інтегруючи по  $t$  (при нульових початкових умовах) рівняння (41):

$$x(t) = \frac{c}{m} \cdot \left\{ \frac{mg}{(1 + m/m_1)} \cdot \frac{1}{M} \cdot \left[ \frac{t^4}{24} - \frac{t^5}{120t_n} \right] + \frac{F_0}{m_1} \cdot \left[ \frac{t^6}{120t_n^2} - \frac{t^7}{420t_n^3} \right] \right\} - \frac{gt^2}{2}. \quad (80)$$

Оскільки при  $t = t_n$   $\ddot{x} = 0$ , то вираз для  $t_n$  можна знайти з наступного рівняння:

$$\xi(t)|_{t=t_n} = \frac{mg}{c}, \quad (81)$$

або:

$$\frac{mg}{(1 + m/m_1)} \cdot \frac{1}{M} \cdot \left\{ \frac{t_n^2}{2} - \frac{t_n^3}{6} \right\} + \frac{F_0}{m_1} \cdot \left\{ \frac{t_n^4}{4} - \frac{t_n^5}{10} \right\} = \frac{mg}{c}. \quad (82)$$

Остаточно для  $t_n$  маємо:



$$t_n = \left[ \frac{mg}{c} \cdot \left\{ \frac{mg}{(1+m/m_1)} \cdot \frac{1}{3M} + \frac{F_0 \cdot 3}{20m_1} \right\}^{-1} \right]^{1/2}. \quad (83)$$

Для  $\dot{x}(t)|_{t=t_n} = V_c$  – усталеної швидкості підйому вантажу після закінчення періоду пуску ( $t \geq t_n$ ) маємо з (80):

$$|V_c| = \left| \frac{c}{m} \cdot \left\{ \frac{mg}{(1+m/m_1)} \cdot \frac{1}{M} \cdot \left( \frac{t_n^3}{8} \right) + \frac{F_0}{m_1} \cdot \left( \frac{t_n^3}{30} \right) \right\} - gt_n \right|. \quad (84)$$

Слід зазначити, що для режиму пуску механізму підйому вантажу гусеничною машиною, який задовольняє критеріям  $I_4$  (62) та  $\tilde{I}$  (65), характерним є відсутність у канатній системі коливань. Крім того, режим руху вантажу (80) та закон зміни у часі рушійної сили приводу механізму підйому гусеничної машини (70) можна реалізувати за допомогою мехатронних систем управління рухом (гусеничних машин у цілому, механізму підйому вантажу, силового приводу).

### Висновки.

1. Обґрунтована фізико-механічна модель, яка дозволяє адекватно описувати процес руху вантажопідйомних механізмів гусеничних машин для різних кінематично-силових впливів на стадіях їх пуску.

2. Встановлені кінематично-силові критерії, які дозволяють оптимізувати режим пуску вказаних вище механізмів, а також позбутися виникнення коливань у канатній системі й її надмірних пружних навантажень.

3. Визначені основні параметри режимів пуску механізмів підйому вантажу гусеничних машин (тривалість процесу пуску у часі, величина усталеної швидкості підйому вантажу та відносного руху “приводу – канату – вантажу”, за яких мінімізуються у період пуску питома (на одиницю маси системи) інерційна сила останньої системи, її похідні у часі першого та другого порядку, а також динамічне навантаження (і, відповідно, коефіцієнт динамічності) у канатній системі в період пуску.

4. Встановлені аналітичні залежності вказаних вище (у попередньому пункті висновків) параметрів руху механізму підйому вантажу гусеничних машин від силових факторів, діючих у досліджуваній системі, котрі є причиною виникнення подібних рухів (вантажів та приводу), а наслідками – рівномірний рух (підйом вантажу) зі сталою швидкістю, мінімальними динамічними навантаженнями канатної системи й без істотних коливань.

5. Запропонований для досліджень процесів підйому вантажу у перехідний період (пуску) метод сплайн-функцій та рівняння Ейлера-Пуассона (високого по часу  $t$  порядку), які дозволяють адекватно описувати подібні рухи механічної системи.

6. Отримані в даному дослідженні результати можуть у подальшому бути використані для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку механізмів підйому вантажу гусеничних машин як на стадіях їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації задля зменшення динамічних навантажень на канатну систему й створення плавної ходи як вантажу, так і приводу, пов'язаних між собою канатною системою, у перехідний період функціонування даної механічної системи (тобто, у період пуску).

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ловейкін В.С. Критерії оцінки режимів руху механізмів і машин. Збірник наукових праць НАУ. Т.4. – К., 1998. С. 8-12.
2. Ловейкін В.С. Оптимізація режимів руху машин і механізмів. Машинознавство. 1999. №7 (25). С. 24-31.
3. Ловейкин В.С. Расчеты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин. – К.:УМК ВО, 1990. 168 с.
4. Ловейкин В.С. Определение оптимальных режимов движения механизмов грузоподъемных машин. Подъемно-транспортное оборудование. – К.: Техніка, 1987. Вып.18. С. 31-35.
5. Иванченко Ф.К. и др. Расчеты грузоподъемных и транспортирующих машин. – К.: Вища школа, 1975. 520 с.
6. Григоров О.В., Ловейкін В.С. Оптиміальне керування рухом механізмів вантажопідйомних машин. – К.: Віпол, 1997, 264 с.
7. Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Пастушенко С.І. Моделювання динаміки механізмів вантажопідйомних машин. – К.–Миколаїв: Вид-во РВВ МДАУ, 2004. 286 с.
8. Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О. Оптимізація перехідних режимів руху механічних систем прямим варіаційним методом. Монографія. – К., Ніжин: Видавець П.П. Лисенко М.М., 2010. 184 с.
9. Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О. Аналіз та синтез режимів руху механізмів вантажопідйомних машин. Монографія. – К.: ЦП «Компрінт», 2012. 299 с.
10. Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Сівак І.М., Гуменюк Ю.О., Кравчук В.Т. Моделювання, аналіз та оптимізація динаміки режимів руху вантажопідйомних машин. – К.: НУБІП, 2018. 865 с.
11. Човнюк Ю.В., Сівак І.М. Динаміка вантажопідйомних та будівельних машин. – К.: НУБІП, 2014. 500 с.
12. Chovnyuk Y.V., Diachenko L.A., Ivanov Y.O., Dichek N.P., Orel O.V. Optimization of Dynamic Loads of Rope Systems of Lifting Mechanisms of Bridge

Cranes During Cargo Handling. Scientific Herald of Uzhhorod University. Series Physics. 2022, №51. P. 59-73.

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor **Zadorozhny Andrey**,  
National Technical University “Kharkov Polytechnic Institute”, Kharkov,  
Ph.D., Associate Professor **Chovnyuk Yurii**,  
Associate Professor **Cherednichenko Petro**,  
Ph.D, Associate Professor **Ostapushchenko Olga**, **Kravchenko Igor**,  
Kyiv National University of Construction and Architecture

**MOVEMENT OPTIMAL MODES ANALYSIS AND SYNTHESIS  
OF TRACKED VEHICLES LOAD-LIFTING MECHANISMS  
Part I. FORCED OSCILLATIONS UNDER VARIOUS IMPULSE-FORCE  
INFLUANCES**

The analysis of tracked vehicles load-lifting mechanisms movement modes is carried out in the work. The main parameters of forced oscillations under various impulse-force influences are comprehensively investigated. The synthesis of cargo lifting mechanisms optimal modes, which minimizes the load on the elastic systems (ropes), is presented. Analysis and synthesis the specified mechanisms movement optimal modes based on the classical variational calculus methods, mathematical physics and modeling. The spline functions apparatus along the time coordinate is also used. A feature of tracked vehicle load-lifting mechanism physical-mathematical model is that, in contrast to exiting approaches to the solution of similar problems, in this study, movement optimal analysis and synthesis is carried out under clear initial and final (terminal) conditions. These conditions are physically understandable, have a physical meaning, since they include a force factor – the cause of such movements. There is also a cause-and-effect relationship – the “load-rope-drive mechanism” system movement with a constant speed after the transient process (start-up) end, which corresponds to Newton’s first law. In addition, the main parameters of such load-lifting mechanism movements are established in the work, according to which the specific (per unit reduced system’s mass) inertial force and its derivatives (up to the second order) are minimized, which allows you to significantly reduce unwanted fluctuations in the system possibility, dynamic loads, and also avoid emergency situations when moving loads.

Key words: analysis; synthesis; movement optimal modes; load-lifting mechanisms; tracked vehicles; forced oscillations; impulse force influences; spline functions; dynamic loads; elastic systems (ropes).

## REFERENCES

1. Loveikin V.S. Kryterii otsinky rezhymiv rukhu mekhanizmiv i mashyn. Zbirnyk naukovykh prats NAU. T.4. – K., 1998. S. 8-12. {in Ukrainian}
2. Loveikin V.S. Optyimizatsiia rezhymiv rukhu mashyn i mekhanizmiv. Mashynoznavstvo. 1999. №7 (25). S. 24-31. {in Ukrainian}
3. Loveikin V.S. Raschetы optimalnykh rezhymov dvyzhenyia mekhanyzmov stroitelnykh mashyn. – K.: UMK VO, 1990. 168 s. {in Russian}
4. Loveikin V.S. Opredelenye optimalnykh rezhymov dvyzhenyia mekhanyzmov hruzorodъemnykh mashyn. Podъemno-transportnoe oborudovanye. – K.: Tekhnika, 1987. Выр.18. S. 31-35. {in Russian}
5. Yvanchenko F.K. y dr. Raschetы hruzorodъemnykh y transportyruishchykh mashyn. – K.: Vyshcha shkola, 1975. 520 s. {in Russian}
6. Hryhorov O.V., Loveikin V.S. Optymalne keruvannia rukhom mekhanizmiv vantazhopidiomnykh mashyn. – K.: Vipol, 1997, 264 c. {in Ukrainian}
7. Loveikin V.S., Chovniuk Yu.V., Dikteruk M.H., Pastushenko S.I. Modeliuvannia dynamiky mekhanizmiv vantazhopidiomnykh mashyn. – K.–Mykolaiv: Vyd-vo RVV MDAU, 2004. 286 s. {in Ukrainian}
8. Loveikin V.S., Romasevych Yu.O. Optyimizatsiia perekhidnykh rezhymiv rukhu mekhanichnykh system priamym variatsiinym metodom. Monohrafiia. – K., Nizhyn: Vydavets P.P. Lysenko M.M., 2010. 184 s. {in Ukrainian}
9. Loveikin V.S., Romasevych Yu.O. Analiz ta syntez rezhymiv rukhu mekhanizmiv vantazhopidiomnykh mashyn. Monohrafiia. – K.: TsP «Komprint», 2012. 299 s. {in Ukrainian}
10. Chovniuk Yu.V., Dikteruk M.H., Sivak I.M., Humeniuk Yu.O., Kravchuk V.T. Modeliuvannia, analiz ta optyimizatsiia dynamiky rezhymiv rukhu vantazhopidiomnykh mashyn. – K.: NUBIP, 2018. 865 c. {in Ukrainian}
11. Chovniuk Yu.V., Sivak I.M. Dynamika vantazhopidiomnykh ta budivelnykh mashyn. – K.: NUBIP, 2014. 500 s. {in Ukrainian}
12. Chovnyuk Y.V., Diachenko L.A., Ivanov Y.O., Dichuk N.P., Orel O.V. Optimization of Dynamic Loads of Rope Systems of Lifting Mechanisms of Bridge Cranes During Cargo Handling. Scientific Herald of Uzhhorod University. Series Physics. 2022, №51. P. 59-73. {in English}