DOI: 10.32347/2786-7269.2024.7.365-381
УДК 528.482.5

канд. техн. наук **Гладілін В.М.**,
vgladilin@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0492-3510,
канд. екон. наук **Камінецька О.В.**,
O_Kaminetska@ukr.net, ORCID:0000-0002-1576-6477,
канд. екон. наук **Сіроштан Т.М.**,
tanya3031@i.ua, ORCID: 0000-0001-6791-7081,
Свідерська Т.О., tsv245@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7623-6958,
канд. геогр. наук **Гамалій І.П.**,
gurgev@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3469-4798,
Білоцерківський національний аграрний університет,
Шудра Н.С., shudranatasha1984@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5416-7680,
Чуланов П.О., chulanov.po@knuba.edu.ua ,ORCID: 0000-0002-6735-3770,
Київський національний університет будівництва та архітектури

АЛГЕБРИЧНЕ ВИРІВНЮВАННЯ ВИМІРЯНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ТРИКУТНИКА

Вирівнювання геодезичних побудов в теперішній час виконується методом найменших квадратів параметричним способом і способом умовних рівнянь (корелатним). Ці способи передбачають складання умовних рівнянь трикутників, базисних умов, азимутальних умов, координатних умов. За цими рівняннями обчислюються коефіцієнти нормальних рівнянь і складаються нормальні рівняння. Нормальні рівняння вирішуються різними алгоритмами – Гауса, квадратного кореня, послідовних наближень, та іншими. Найбільш трудомістка частина це складання умовних і нормальних рівнянь, а вирішення рівнянь на електронно обчислювальних машинах виконується швидко і з достатньою точністю. В статті пропонується практично новий спосіб за допомогою алгебраїчних кіл без складання і вирішення нормальних рівнянь, даний спосіб може бути поширений на геодезичну мережу з багатьох трикутників.

Ключові слова: Алгебраїчні кола; діаметр описаного кола; похибка діаметра; похибки виміряних кутів і виміряних довжин сторін

Постановка проблеми. Вирівнювання виміряних елементів трикутника виконати складно. Пропонується спосіб вирівнювання за допомогою алгебраїчних кіл.

Основна частина. Якщо в трикутнику виміряні шість елементів: кути A, B, C, довжини протилежних сторін a, b, c, який зображений на рис. 3 з середніми квадратичними похибками (СКП) відповідно m_A, m_B, m_C, m_a, m_b, m_c, значення зрівняних елементів повинні задовольнити вимогі рівнянь

$$\frac{a}{\sin A} = D_A; \quad \frac{b}{\sin B} = D_B; \quad \frac{c}{\sin C} = D_C, \tag{1}$$

$$A + B + C = 180^o, \tag{2}$$

де D_i – метричний параметр трикутника (метрична величина, через яку встановлюється математичний зв'язок між сторонами і кутами трикутника), тобто значення діаметра описаного кола. Якщо $D_A = D_B = D_C$, які знайдені за формулами (1) і виконується умова (2), то це підтверджує справедливість закону синусів.

Кількість сполучень з шести елементів (A, B, C, a, b, c) по три (сторона і два кута, кут і дві сторони три кути і три сторони) [8] буде:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n- k)! \cdot k!} = C_6^3 = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = 20.$$

Основне викладення матеріалу. З’єднання елементів сполучень дадуть множину (коло) ***M*** – трикутників. Розіб’ємо цю множину на чотири підмножини і поставимо у відповідність трикутникам діаметри їх кіл [5].

$$\boldsymbol{C_1} = \left\{ \overbrace{\angle A\angle B}^{a},\ \overbrace{D_A}^{a};\ \overbrace{\angle A\angle C}^{a},\ \overbrace{D_A}^{a};\ \overbrace{\angle A}^{ac},\ \overbrace{D_A}^{a};\ \overbrace{\angle A}^{ab},\ \overbrace{D_A}^{a} \right\}.$$

$$\boldsymbol{C_2} = \left\{ \overbrace{\angle A\angle B}^{b},\ \overbrace{D_B}^{b};\ \overbrace{\angle B\angle C}^{b},\ \overbrace{D_B}^{b};\ \overbrace{\angle B}^{bc},\ \overbrace{D_B}^{b};\ \overbrace{\angle B}^{ab},\ \overbrace{D_B}^{b} \right\}.$$

$$\boldsymbol{C_3} = \left\{ \overbrace{\angle A\angle C}^{c},\ \overbrace{D_C}^{c};\ \overbrace{\angle B\angle C}^{c},\ \overbrace{D_C}^{c};\ \overbrace{\angle C}^{bc},\ \overbrace{D_C}^{c};\ \overbrace{\angle C}^{ac},\ \overbrace{D_C}^{c} \right\}.$$

$$\boldsymbol{P} = \left\{ \begin{matrix} \overbrace{\angle A\angle B\angle C}^{abc}, \overbrace{D}^{abc}; \overbrace{\angle A}^{bc}, \overbrace{D_A}^{bc}; \overbrace{\angle B}^{ac}, \overbrace{D_B}^{ac}; \overbrace{\angle C}^{ab}, \overbrace{D_C}^{ab}; \overbrace{\angle B\angle C}^{a}, \overbrace{D_{BC}}^{a}; \overbrace{\angle A\angle C}^{b}, \overbrace{D_{AC}}^{b}; \overbrace{\angle A\angle B}^{c}, \overbrace{D_{AB}}^{c}; \\ \Delta ABC, D = 1 \end{matrix} \right\}$$

в цих формулах (рис.1):

$\overbrace{\angle A\angle B}^{a}$ – обчислення діаметра описаного кола трикутника за виміряною стороною a і виміряними кутами A і B;

$\overbrace{\angle A\angle C}^{a}$ – обчислення діаметра описаного кола трикутника за виміряною стороною a і виміряними кутами A і C;

$\frac{b}{\overbrace{\angle A \angle B}}$ – обчислення діаметра описаного кола трикутника за виміряною стороною b і виміряними кутами A і B;

$\frac{b}{\overbrace{\angle B \angle C}}$ – обчислення діаметра описаного кола трикутника за виміряною стороною b і виміряними кутами B і C;

$\frac{c}{\overbrace{\angle A \angle C}}$ – обчислення діаметра описаного кола трикутника за виміряною стороною с і виміряними кутами A і C;

$\frac{c}{\overbrace{\angle B \angle C}}$ – обчислення діаметра описаного кола трикутника за виміряною стороною с і виміряними кутами B і C;

$\frac{ac}{\overbrace{\Delta\alpha}}$ – обчислення діаметра описаного кола трикутника за виміряними сторонами a і c і виміряним кутом A;

$\frac{ab}{\overbrace{\Delta\alpha}}$ – обчислення діаметра описаного кола трикутника за виміряною стороною b і виміряними кутами A і B;

$\frac{bc}{\angle B}$ – обчислення діаметра описаного кола трикутника за виміряними сторонами b і c і виміряним кутом B;

$\frac{ab}{\overbrace{\angle B}}$ – обчислення діаметра описаного кола трикутника за виміряними сторонами a і b і виміряним кутом B;

$\frac{bc}{\overbrace{\angle C}}$ – обчислення діаметра описаного кола трикутника за виміряними сторонами b і c і виміряним кутом C;

$\frac{ac}{\angle C}$ – обчислення діаметра описаного кола трикутника за виміряними сторонами a і c і виміряним кутом C;

Тоді коло $\boldsymbol{M}$ буде диз'юнктивне (або вільне) об'єднання [3].

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{C_1} \cup \boldsymbol{C_2} \cup \boldsymbol{C_3} \cup \boldsymbol{P},$$

де $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$, $\boldsymbol{C}_3$ – три сімейства описаних кіл трикутників.

Зауважимо, що трикутники утворюють сімейство $\boldsymbol{C}$ тоді, коли вони мають рівні метричні параметри і ці параметри є функціями одних і тих же аргументів. З кожного сімейства $\boldsymbol{C}_i$ візьмемо по одному трикутнику і складемо множину $\boldsymbol{A}$ трикутників $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{C_1}\} \cup \{\boldsymbol{C_2}\} \cup \{\boldsymbol{C_3}\}$.

Так як три кути не визначають повністю трикутник (немає метрики зображення (тобто масштабу)), тому ΔABC і Δabc необхідно вивести з ряду $\boldsymbol{P}$. Виведення Δabc обумовлено тим, що він є алгебраїчним відображенням ΔABC і його подальше включення порушить симетрію множини вихідних діаметрів, далі маємо $\boldsymbol{P'} = \{\Delta ABC\} \cup \{\Delta abc\}$.

Після виключення $\boldsymbol{P'}$ одержимо множину $\boldsymbol{B}$ (доповнення $\boldsymbol{P'}$ в $\boldsymbol{P}$), тому

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P} \setminus \boldsymbol{P'}.$$

Об’єднання множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ дає множину $\boldsymbol{T}$ трикутників

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}. \tag{3}$$

Діаметри кіл, описаних навколо $\boldsymbol{T}$- трикутників, утворять множину із дев’яти діаметрів:

$$\overset{a}{\widehat{D_A}},\ \overset{b}{\widehat{D_B}},\ \overset{c}{\widehat{D_C}},\ \overset{bc}{\widehat{D_A}},\ \overset{ac}{\widehat{D_B}},\ \overset{ab}{\widehat{D_C}},\ \overset{a}{\widehat{D_{BC}}},\ \overset{b}{\widehat{D_{AC}}},\ \overset{c}{\widehat{D_{AB}}}.$$

По суті це є симетрична множина, тому що кількість і склад верхніх індексів відповідає кількості і складу нижніх індексів, і це є відображенням вимірів, оскільки трикутник *ABC* має пари протилежних елементів: $a \to A; b \to B; c \to C$.

Побудуємо граф GD_o діаметра кола описаного навколо вирівняного трикутника (D_o – вирівняний діаметр описаного кола трикутника), для чого спочатку побудуємо графи GD_i діаметрів кіл описаних навколо $\boldsymbol{T}$- трикутників, які зображені на рис. 1, а потім об’єднаємо їх.

Три вершини *a*, *b*, *c* утворюють «площину» - це є метричне поле. Відображенням метричного поля є поле кутових вимірів – «площина» яка задається трьома точками (кутами) *A*, *B*, *C*. Зауважимо, що для виміряного трикутника відображення метричного поля в кутовому не є однозначним, тому верхня площина на рис. 1 «нахилена» до нижньої. Після визначення найімовірнішого (зрівняного) метричного параметра D_o трикутника можна привести ці площини у повну відповідність. Тобто D_o є «лінза» [4],[8] з допомогою якої одержимо однозначне відображення метричного поля в кутовому полі і навпаки.

Якщо граф G D_o об’єднати з графом $\mathrm{G}\,D^{abc}$, або $\mathrm{G}\,D_{ABC}$, які показані на рис. 1, то це не змінить геометрію графа G D_o. Множина $\boldsymbol{T}$- трикутників є найменша підмножина множини $\boldsymbol{M}$- трикутників, об’єднання діаметрів описаних кіл яке дає повне відображення діаметра D_o.

Діаметри $\overset{a}{\widehat{D_A}}, \overset{b}{\widehat{D_B}}, \overset{c}{\widehat{D_C}}$ обчислюють за законом синусів (1), а їх дисперсії (середні квадратичні похибки) [7] за формулами

$$\begin{cases} m_{D_A}^2 = \left(\frac{1}{sin^2(A)}\right) \cdot \left[m_a^2 + a^2 \cdot cot^2(A) \cdot \left(\frac{m_A^2}{\rho^2}\right)\right], \\ m_{D_B}^2 = \left(\frac{1}{sin^2(B)}\right) \cdot \left[m_b^2 + b^2 \cdot cot^2(B) \cdot \left(\frac{m_B^2}{\rho^2}\right)\right], \\ m_{D_C}^2 = \left(\frac{1}{sin^2(C)}\right) \cdot \left[m_c^2 + c^2 \cdot cot^2(C) \cdot \left(\frac{m_C^2}{\rho^2}\right)\right]. \end{cases} \tag{4}$$

Значення діаметрів $\overset{bc}{\widehat{D_A}}, \overset{ac}{\widehat{D_B}}, \overset{ab}{\widehat{D_C}},$ кіл описаних навколо трикутників утворених кутом і прилеглими до нього двома сторонами, обчислюють за формулами косинусів

$$\begin{cases} \overset{bc}{\widehat{D_A}} = \dfrac{\sqrt{b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot \cos A}}{\sin A}, \\ \overset{ac}{\widehat{D_B}} = \dfrac{\sqrt{a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot \cos B}}{\sin B}, \\ \overset{ab}{\widehat{D_C}} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot \cos C}}{\sin C}, \end{cases} \tag{5}$$

а їх дисперсії (середні квадратичні похибки) обчислюють за формулами [4], [9]

$$\begin{cases} m^2_{D_A^{bc}} = m^2_{D^b} + m^2_{D^c} + m^2_{D_A}, \\ m^2_{D_B^{ac}} = m^2_{D^a} + m^2_{D^c} + m^2_{D_B}, \\ m^2_{D_C^{ab}} = m^2_{D^a} + m^2_{D^b} + m^2_{D_C}, \end{cases} \tag{6}$$

де:

$$\begin{cases} m_{D^b} = \dfrac{b - c\cdot \cos A}{D_A^{bc}\cdot (\sin A)^2}\cdot m_b, \\ m_{D^c} = \dfrac{c - b\cdot \cos A}{D_A^{bc}\cdot (\sin A)^2}\cdot m_c, \\ m_{D^a} = \dfrac{a - c\cdot \cos A}{D_A^{bc}\cdot (\sin A)^2}\cdot m_a, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} m_{D_A} = \dfrac{b\cdot c\cdot [1+(\cos A)^2]-(b^2+c^2)\cdot \cos A}{D_A^{bc}\cdot (\sin A)^3}\cdot \dfrac{m_A}{\rho}, \\ m_{D_B} = \dfrac{a\cdot c\cdot [1+(\cos B)^2]-(a^2+c^2)\cdot \cos B}{D_B^{ac}\cdot (\sin B)^3}\cdot \dfrac{m_B}{\rho}, \\ m_{D_C} = \dfrac{a\cdot b\cdot [1+(\cos C)^2]-(a^2+b^2)\cdot \cos C}{D_C^{ab}\cdot (\sin C)^3}\cdot \dfrac{m_C}{\rho}, \end{cases} \tag{8}$$

Три діаметри $\overset{a}{\widehat{D_{BC}}}, \overset{b}{\widehat{D_{AC}}}, \overset{c}{\widehat{D_{AB}}}$, кіл описаних навколо трикутників утворених двома кутами і прилеглою до них стороною обчислюються за формулами

$$\begin{cases} \overset{a}{\widehat{D_{BC}}} = \dfrac{a}{\sin(B+C)} = \dfrac{a}{\sin[180-(B+C)]}, \\ \overset{b}{\widehat{D_{AC}}} = \dfrac{b}{\sin(A+C)} = \dfrac{b}{\sin[180-(A+C)]}, \\ \overset{c}{\widehat{D_{AB}}} = \dfrac{c}{\sin(A+B)} = \dfrac{c}{\sin[180-(A+B)]}, \end{cases} \tag{9}$$

а їх дисперсії (середні квадратичні похибки) обчислюють за формулами

$$\begin{cases} m^2_{D_{BC}} = \left(\dfrac{1}{\sin^2(B+C)}\right)\cdot \left[m_a^2 + a^2\cdot \cot^2(B+C)\cdot \left(\dfrac{m_B^2+m_C^2}{\rho^2}\right)\right], \\ m^2_{D_{AC}} = \left(\dfrac{1}{\sin^2(A+C)}\right)\cdot \left[m_b^2 + b^2\cdot \cot^2(A+C)\cdot \left(\dfrac{m_A^2+m_C^2}{\rho^2}\right)\right], \\ m^2_{D_{AB}} = \left(\dfrac{1}{\sin^2(A+B)}\right)\cdot \left[m_c^2 + c^2\cdot \cot^2(A+B)\cdot \left(\dfrac{m_A^2+m_B^2}{\rho^2}\right)\right]. \end{cases} \tag{10}$$

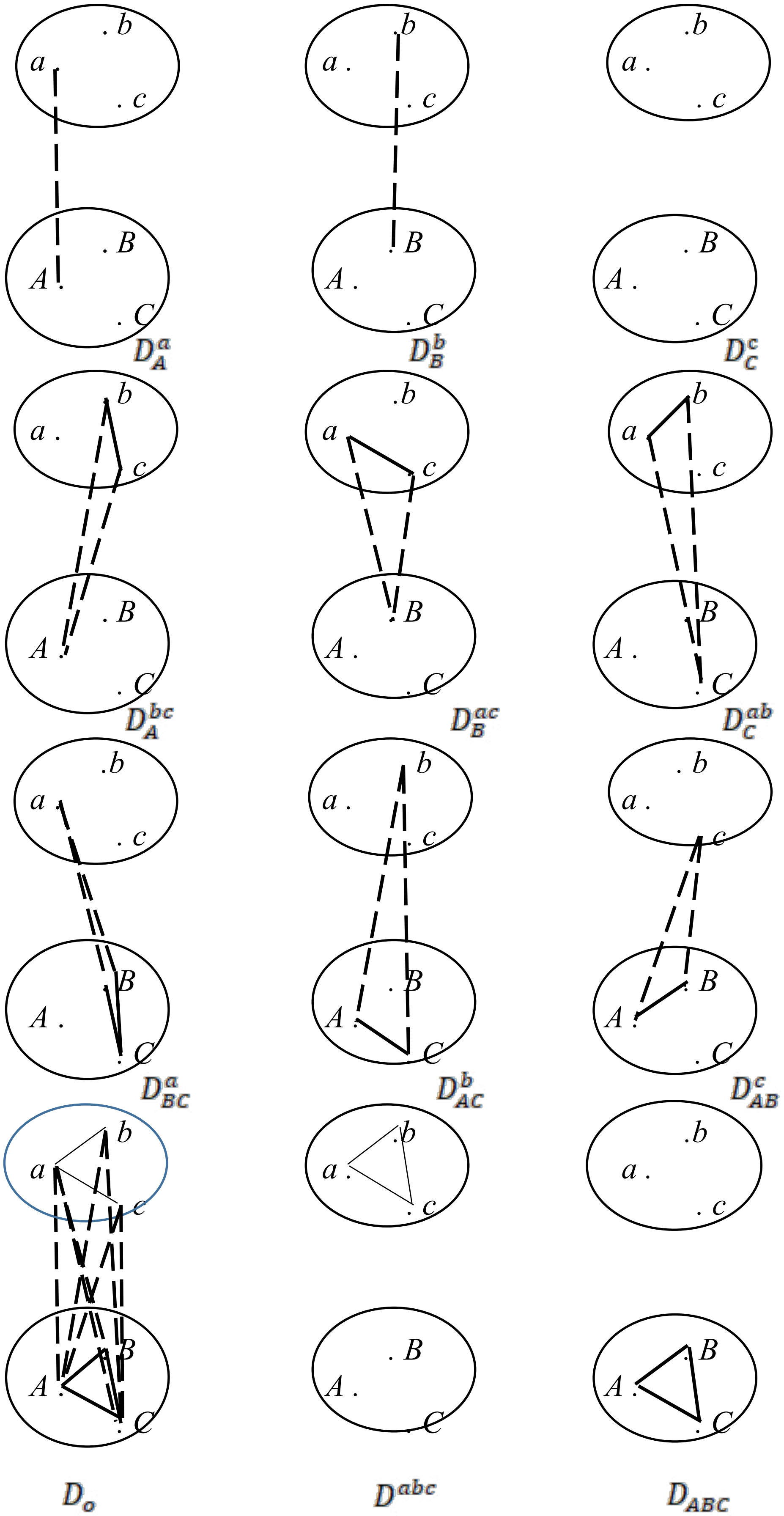

Рис. 1. Графи діаметрів описаних кіл, які обчислені
за різними елементами трикутника G D_o та G D_i

Метричний параметр D_o вирівняного трикутника визначаємо як загальну вагову арифметичну середину [9]

$$D_o = \frac{\sum_{i=1}^{9} D_i \cdot P_i}{\sum_{i=1}^{9} P_i} \tag{11}$$

$$P_i = \frac{k^2}{m_{D_i}^2}, \tag{12}$$

де k^2 – коефіцієнт пропорційності, мм^2.

Вагу діаметру P_{Do} і його середню квадратичну похибку m_{Do} обчислюємо за формулами

$$P_{D_o} = \sum_{i=1}^{9} P_{D_i}, \ m_{D_o}^2 = \frac{k^2}{P_{D_o}}, \tag{13}$$

де k^2 визначають за формулою Бесселя для нерівно - точних вимірювань

$$k^2 = \frac{\sum_{i=1}^{9} P_i V_i^2}{n-1}, \tag{14}$$

де: $V_i = D_i - D_o$; n – кількість ***Т***- трикутників.

Якщо в вимірах відсутні систематичні похибки, то послідовно обчислені коефіцієнти k будуть співпадати в межах похибки

$$m_k = \frac{k}{\sqrt{2(n-1)}}, \tag{15}$$

коли різниця між ними буде більша, ніж m_k то це буде вказувати на наявність систематичних (або грубих) похибок. З формули довжини кола

$$L_o = \pi D_o, \tag{16}$$

про диференціювавши її

$$dL_o = \pi \cdot dD_o, \tag{17}$$

і перейшовши до середніх квадратичних похибок, одержимо

$$m_{L_o} = \pi \cdot m_{D_o}, \tag{18}$$

де m_{Lo} – середня квадратична похибка довжини описаного кола вирівняного трикутника, яка повністю відображає кінцевий результат впливу всіх похибок лінійних та кутових вимірів, тому її можна назвати середньо - квадратичною метричною похибкою вимірів і позначити її як m_S при приблизно нормальному законі розподілу виміряних величин елементів [10]. Геометричну суть цієї похибки видно після аналізу і порівняння формули (16) з формулою (18): якщо L_o – довжина кола вирівняного трикутника, то СКП $m_S = m_{L_o}$ – довжини такого кола, значення діаметра якого дорівнює помилці $\cdot m_{D_o}$. Якщо коло діаметром $\cdot m_{D_o}$ назвати колом похибок трикутника, то середньою квадратичною метричною похибкою m_S трикутника буде дуга кола вирівняного трикутника, з довжиною яка дорівнює довжині кола похибок трикутника. Похибку m_S переведемо в кутову міру

$$\mu = \frac{m_S \cdot \rho}{D_o} = \frac{\pi \cdot m_{D_o} \cdot \rho}{D_o}, \quad (19)$$

де μ – загальна середня квадратична кутова похибка трикутника. Середньою квадратичною похибкою μ трикутника можна назвати вписаний в коло вирівняного трикутника кут, який спирається на дугу, довжиною рівною довжині кола похибок трикутника.

Зауважимо, що значення D_o, $\cdot\, m_{D_o}$, m_S, μ визначають вирівняний трикутник взагалі, причому m_S це загальна середня квадратична похибка сторін, а μ - загальна середня квадратична похибка кутів.

За формулами

$$A' = \begin{cases} \sin^{-1}\left(\frac{a}{D_o}\right), \text{ якщо } a^2 < (b^2 + c^2), \\ 180^o - \sin^{-1}\left(\frac{a}{D_o}\right), \text{ якщо } a^2 > (b^2 + c^2), \end{cases}$$

$$B' = \begin{cases} \sin^{-1}\left(\frac{b}{D_o}\right), \text{ якщо } b^2 < (a^2 + c^2), \\ 180^o - \sin^{-1}\left(\frac{b}{D_o}\right), \text{ якщо } b^2 > (a^2 + c^2), \end{cases} \quad (20)$$

$$C' = \begin{cases} \sin^{-1}\left(\frac{c}{D_o}\right), \text{ якщо } c^2 < (a^2 + b^2), \\ 180^o - \sin^{-1}\left(\frac{c}{D_o}\right), \text{ якщо } c^2 > (a^2 + b^2), \end{cases}$$

перерахуємо довжини сторін a, b, c в кутову міру A', B', C'.

Оцінимо лінійні виміри в кутовій мірі [5]

$$A' + B' + C' - 180^o = f_{\hat{S}}, \quad (21)$$

де $f_{\hat{S}}$ – кутова нев’язка лінійних вимірів.

Порівняємо кутову нев’язку лінійних вимірів з кутовою нев’язкою f_β трикутника. Обчислимо лінійну нев’язку f_S трикутника [5]

$$f_S = D_o \cdot \sin f_{\hat{S}}, \quad (22)$$

і лінійну нев’язку $f_{\overline{\beta}}$ кутових вимірів трикутника

$$f_{\overline{\beta}} = D_o \cdot \sin f_\beta. \quad (23)$$

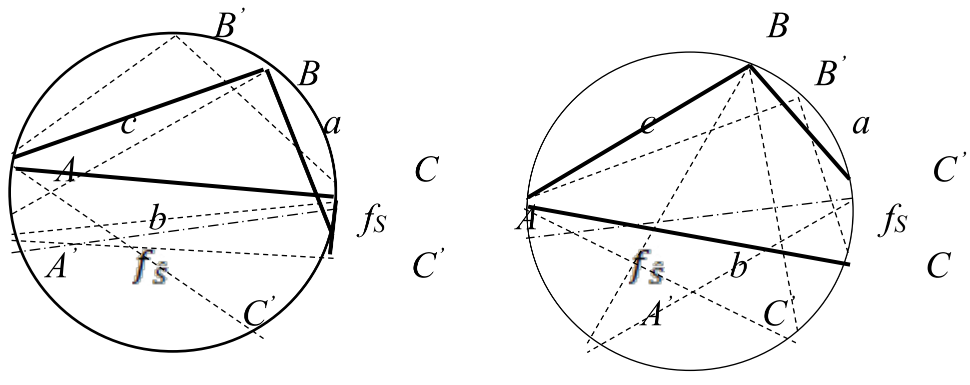

Рис. 2. Сторони a, b, c і кутова $f_{\hat{S}}$ та лінійна f_S нев’язкі в колі діаметром D_o

Зауважимо, що лінійна нев'язка кутових вимірів трикутника це є хорда кола вирівняного трикутника на яку спирається вписаний кут, величиною рівний кутовій неув'язці f_β трикутника, які наведені на рис. 2.

Визначимо середні квадратичні похибки сторін виміряного трикутника в кутовій мірі [5], [7]

$$\begin{cases} m_A = \frac{m_a \cdot \rho}{D_o \cdot \cos A'}, \\ m_B = \frac{m_b \cdot \rho}{D_o \cdot \cos B'}, \\ m_C = \frac{m_c \cdot \rho}{D_o \cdot \cos C'}, \end{cases} \tag{24}$$

Встановимо ваги p_a, p_b, p_c сторін a, b, c і ваги p_A, p_B, p_C кутів A, B, C за формулою

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}, \tag{25}$$

де μ – загальна середня квадратична похибка трикутника (сек); $i = a, b, c, A, B, C$.

Кути трикутника були виміряні і визначені із лінійних вимірів, тоді визначимо їх середні вагові значення

$$\begin{cases} A'' = \frac{A \cdot p_A + A' p_a}{p_A + p_a}, \\ B'' = \frac{B \cdot p_B + B' p_b}{p_B + p_b}, \\ C'' = \frac{C \cdot p_C + C' p_c}{p_C + p_c}. \end{cases} \tag{26}$$

Оцінимо лінійно – кутові виміри в трикутнику

$$A'' + B'' + C'' - 180^o = f, \tag{27}$$

де: f – лінійно – кутова нев'язка трикутника (нев'язка середньо вагових кутів, визначених із кутових і лінійних вимірів).

Встановимо ваги $\widehat{p_A}, \widehat{p_B}, \widehat{p_C}$ кутів A'', B'', C''

$$\widehat{p_A} = p_a + p_A, \ \widehat{p_B} = p_b + p_B, \ \widehat{p_C} = p_c + p_C.$$

Поправки в кути розподілимо пропорційну їх оберненим вагам

$$\begin{cases} V_{A''} = -\frac{f}{q} \cdot \frac{1}{\frac{a}{\widehat{p_A}}}, \\ V_{B''} = -\frac{f}{q} \cdot \frac{1}{\frac{b}{\widehat{p_B}}}, \\ V_{C''} = -\frac{f}{q} \cdot \frac{1}{\frac{c}{\widehat{p_C}}}, \end{cases} \tag{28}$$

де
$$q = \frac{1}{\frac{a}{\widehat{p_A}}} + \frac{1}{\frac{b}{\widehat{p_B}}} + \frac{1}{\frac{c}{\widehat{p_C}}} \tag{29}$$

Обчислимо елементи вирівняного трикутника

$$\begin{cases} A_o = A'' + V_{A''},\ a_o = D_o \cdot \sin A_o\,, \\ B_o = B'' + V_{B''},\ b_o = D_o \cdot \sin B_o\,, \\ C_o = C'' + V_{C''},\ c_o = D_o \cdot \sin C_o\,, \end{cases} \tag{30}$$

заключний контроль обчислень (і вимірювань) виконують за формулами (1) і (2).

В геодезичній практиці можуть бути і інші випадки вирівнювання трикутника, наприклад, коли виміряний трикутник має чотири або п'ять елементів, тоді множина ***M*** буде складатися з чотирьох або з десяти ***M***-трикутників. Якщо виміряний трикутник має три (виміряні) кути, то ΔABC завжди виводиться, а коли є три сторони (виміряні), то Δabc, завжди буде ***T***-трикутником, в множину ***T*** буде входити не три ***C***- трикутники, а один або два, тобто стільки, скільки є ***C***- сімейств (3). Якщо виміряний трикутник має жорстку вихідну сторону, що її розмір при вирівнюванні змінювати не дозволяється, то тоді, як знайдено метричний параметр D_o трикутника, потрібно ввести цю вихідну сторону в коло діаметром D_o, щоб там вона стала хордою, обчислити значення вписаного в коло кута, який протилежний вихідній стороні і прийняти це значення за вирівняне, а лінійно – кутову нев'язку, яка залишиться розподілити на два інші кути у відповідності з їх оберненими вагами (29).

Оскільки, що було встановлено вище, діаметр описаного навколо виміряного трикутника кола має похибку $\cdot m_{D_o}$, а ця похибка може бути розподілена по всій довжині кола тільки рівномірно, то можна стверджувати, що центр описаного кола лежить в колі похибок трикутника (рис. 3). Зрозуміло, що вирівняний трикутник є таким, що планове положення його вершин оцінюється колами похибок (рис. 3), тому приріст середніх квадратичних похибок координат, при переході від однієї вершини трикутника до іншої відсутній, тобто дорівнює нулю, незалежно від напряму переходу. Це пояснюється тільки тим, що середні квадратичні похибки вирівняних сторін і дирекційних кутів пов'язані між собою і приймають такі значення, що обчислені за ними відповідні середні квадратичні похибки планового положення вершин трикутника взаємно компенсуються при переході від однієї вершини до іншої.

Коли вершини вирівняного трикутника лежать в колах похибок (рис. 3), то

$$m_{a_o} = m_{b_o} = m_{c_o} = m_{D_o} \tag{31}$$

$$m_{\alpha_{a_o}} = \frac{(m_{D_o} \cdot \rho)}{a_o},\ m_{\alpha_{b_o}} = \frac{(m_{D_o} \cdot \rho)}{b_o},\ m_{\alpha_{c_o}} = \frac{(m_{D_o} \cdot \rho)}{c_o}, \tag{32}$$

Дисперсії (середні квадратичні похибки) вирівняних кутів визначаються за формулами [3]

$$\begin{cases} m_{A_o}^2 = \rho^2 \cdot m_\gamma^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{c_o^2} + \frac{1}{b_o^2}\right) - \frac{\cos A_o}{c_o \cdot b_o}\right], \\ m_{B_o}^2 = \rho^2 \cdot m_\gamma^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{a_o^2} + \frac{1}{c_o^2}\right) - \frac{\cos B_o}{a_o \cdot c_o}\right], \\ m_{C_o}^2 = \rho^2 \cdot m_\gamma^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{a_o^2} + \frac{1}{b_o^2}\right) - \frac{\cos C_o}{a_o \cdot b_o}\right], \\ m_\gamma = m_{D_o}. \end{cases} \tag{33}$$

Якщо вирівняний трикутник має координати вершин $x_A\ y_A$; $x_B\ y_B$; $x_C\ y_C$; то ці координати будуть мати рівні середні квадратичні похибки

$$m_{x_A} = m_{y_A} = m_{x_B} = m_{y_B} = m_{x_C} = m_{y_C} = \frac{m_{D_o}}{\sqrt{2}}. \tag{34}$$

Трикутник є найменший із усіх багатокутників і являє собою найменшу замкнену лінійно – кутову систему, можна стверджувати, що будь – яка інша вирівняна система може бути тільки такою, що всі її вершини лежать в рівних колах похибок, до такої вирівняної системи веде спосіб кіл і це є його основною метою. Так як в способі кіл метричний параметр виміряного трикутника знаходиться як загальна арифметична середина, за принципом $[pV^2]$ = min методу найменших квадратів, а ваги лінійних і кутових вимірів встановлюються через одне поле (кутове), тому визначаються вирівняні (найімовірніші) значення виміряних величин і повністю задовольняються математичні зв’язки, які існують між лінійними і кутовими вимірами.

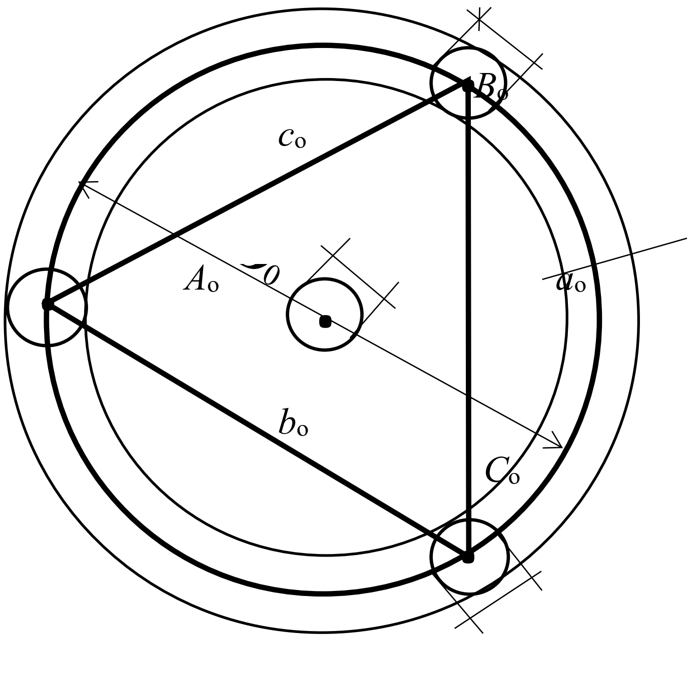

Рис. 3. Зрівняний трикутник, описане коло D_o, кола похибок m_{D_o}

Приклад 1. У роботах [1], [6] виконано зрівнювання одного й того же трикутника тріангуляції 1 класу способом найменших квадратів. В трикутнику виміряні всі шість елементів:

$A = 65^o41'07'', B = 65^o42'40'', C = 48^o36'16''$, a = 24972.70 м, b =24977.79м,

c = 20557.11 м. При вирівнюванні було прийнято, що кути виміряні з середньою квадратичною похибкою $m_\beta = 1''$, сторони з похибкою m_S = 100 мм.

Вирівняємо цей трикутник способом алгебраїчних кіл. В таблиці 1 приведені значення діаметрів кіл описаних навколо дев'яти ***T***- трикутників, які обчислені за формулами (1), (5), (9) їх середні квадратичні похибки, які обчислені за формулами (4), (6), (7), (8), (10) і ваги, а також обчислені поправки V.

Таблиця 1.

Діаметри кіл навколо трикутника тріангуляції 1-го класу, їх СКП та ваги

Позна-чення	D, м	m_{D_i}, мм	p_i k=125	V, мм	V^2, мм^2	pV^2	pV
$\overset{a}{\widehat{D_A}}$	27403.4547	125.1	0.999	-124.6	15521.7	15502.1	-124.428
$\overset{b}{\widehat{D_B}}$	27403.4604	125.0	1.000	-118.9	14146.7	14141.0	-118.892
$\overset{c}{\widehat{D_C}}$	27403.5475	177.4	0.496	-31.8	1014.2	503.3	-15.804
$\overset{bc}{\widehat{D_A}}$	27403.6088	94.2	1.760	29.5	871.2	1533.7	51.962
$\overset{ac}{\widehat{D_B}}$	27403.6052	94.2	1.760	25.9	670.8	1181.1	45.560
$\overset{ab}{\widehat{D_C}}$	27403.5476	106.9	1.367	-31.8	1009.5	1380.4	-43.445
$\overset{a}{\widehat{D_{BC}}}$	27403.6348	138.7	0.812	55.5	3080.4	2500.4	45.052
$\overset{b}{\widehat{D_{AC}}}$	27403.6403	138.7	0.812	60.9	3712.6	3017.1	49.517
$\overset{c}{\widehat{D_{AB}}}$	27403.8988	212.6	0.346	319.5	102074.7	35283.9	110.438
		$\sum p_i$=	9.353		$\sum pV^2$=	75043.0	$\sum pV$0.000

Далі маємо D_o =27403.5793 м, k^2= $[pV^2]/8$ = 9492.3 мм^2, k = 97.4 мм, m_k = 24.4 мм.

Так як різниці між обчисленими значеннями k_i перевищують m_k, то в вимірах присутні систематичні похибки. З аналізу даних табл. 1 видно, що ці систематичні похибки допущені при вимірах кутів A і B або при вимірювані

довжини сторони *c*. Після того як виявлені систематичні похибки необхідно перевизначити (переміряти) елементи *A* і *B*, якщо ж це не брати до уваги, то одержимо зміщенні оцінки: m_{D_o}= 30.4мм, m_S = m_{L_o}= 96.85 мм, $\mu = 0.''753, f_\beta = 3''$,
$f_{\overline{\beta}} = 398.6$ мм, $A' = 65^o41'04''.9,\ B' = 65^o42'38''.0,\ C' = 48^o36'15''.7;$
$f_{\hat{S}} = -1''.33, f_S = -177.0$ мм;
$m_{A'} = 1''.83,\ m_{B'} = 1''.83,\ m_{C'} = 1''.13;\ p_A = p_B = p_C = 0.5665,$ p_a $=p_b$=0.1695 p_c = 0.4374,
$A'' = 65^o41'06''.5, B'' = 65^o42'39''.6, C'' = 48^o36'15''.9, f = 2'';$
$\widehat{p_A} = 0.673,\ \widehat{p_B} = 0.673,\ \widehat{p_C} = 0.917;\ V_{A''} = -0''.7, V_{B''} = -0''.8, V_{C''} = -0''.5$

Зрівняні значення елементів трикутника:

$$A_o = 65^o41'05''.8,\ B_o = 65^o42'38''.8,\ C_o = 48^o36'15''.4;$$
$$a_o = 24972.7484\text{ м},\ b_o = 24977.8345\text{ м},\ c_o = 20557.0776\text{ м}.$$

Виходячи з поправок [1] були знайдені значення елементів трикутника *ABC*, який вирівняний окремо в роботі [1] і в роботі [6]. а потім за законом синусів (1) обчислені їх відповідні метричні параметри $D'_o = 27403.545$ м, $D''_o = 27403.555$ м в зв'язку з тим, що були виявлені систематичні похибки в вимірах, оцінки D_o, D'_o, D''_o зміщені, тому порівняння поправок і подальший їх аналіз не виконувався, але контроль визначення діаметра D_o виконаємо за зрівняними значеннями довжин сторін a_o, b_o, c_o за формулою

$$D_{abc} = \frac{2\cdot a_o\cdot b_o\cdot c_o}{\sqrt{2\cdot(a_o^2\cdot b_o^2 + b_o^2\cdot c_o^2 + a_o^2\cdot c_o^2) - (a_o^4 + b_o^2 + c_o^2)}} = 27403.5793\, m,$$

(35)

що повністю співпадає з обчисленим середньо ваговим значенням діаметра, сума зрівняних кутів повністю відповідає умові (2), а діаметри описаного кола трикутника відповідають закону синуса (1).

Дисперсія діаметра визначиться за формулою

$$m_{D_o}^2 = m_{D^a}^2 + m_{D^b}^2 + m_{D^c}^2 \tag{36}$$

де СКП визначення діаметра за кожною стороною обчислюються за формулами

$$\begin{cases} m_{D^a} = \frac{D_{abc}^3\cdot[a^4-(b^2-c^2)^2]}{4\cdot a^3\cdot b^2\cdot c^2}\cdot m_a, \\ m_{D^b} = \frac{D_{abc}^3\cdot[b^4-(a^2-c^2)^2]}{4\cdot a^2\cdot b^3\cdot c^2}\cdot m_b, \\ m_{D^c} = \frac{D_{abc}^3\cdot[c^4-(a^2-b^2)^2]}{4\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^3}\cdot m_c, \end{cases} \tag{37}$$

Приклад 2. У роботі [2] виконано зрівнювання одного й того же трикутника тріангуляції 1-го розряду параметричним і корелатним способами. В трикутнику виміряні всі шість елементів:

$A = 46^o25'15'', B = 68^o01'27'', C = 65^o33'09''$, *a* = 795.881 m, *b* =1018.660 m, *c* = 1000.000 m. При вирівнюванні було прийнято, що кути виміряні з середньою квадратичною похибкою m_β = 5", сторони з СКП m_S = 35.43 мм [2].

Вирівняємо цей трикутник способом кіл. В таблиці 2 приведені значення діаметрів кіл описаних навколо дев'яти ***T***- трикутників, їх середні квадратичні похибки і ваги.

Таблиця 2.

Діаметри кіл їх СКП та ваги навколо трикутника тріангуляції 1-го розряду

Позначення	*D*, м	m_{D_i}, мм	p_i *k*=	*V*, мм	V^2, мм^2	pV^2	pV
$\overset{a}{\widehat{D_A}}$	1098.642	55.08	0.4203	-137.2	18820.8	7909.9	57.6
$\overset{b}{\widehat{D_B}}$	1098.473	39.68	0.8096	-31.6	1000.3	809.9	-25.6
$\overset{c}{\widehat{D_C}}$	1098.490	40.76	0.7676	-15.1	228.3	175.3	-11.6
$\overset{bc}{\widehat{D_A}}$	1098.471	27.87	1.6413	-34.1	1163.3	1909.3	-56.1
$\overset{ac}{\widehat{D_B}}$	1098.524	21.09	2.8660	19.4	375.8	1077.0	55.6
$\overset{ab}{\widehat{D_C}}$	1098.510	22.57	2.5032	5.1	25.7	64.2	12.7
$\overset{a}{\widehat{D_{BC}}}$	1098.596	60.63	0.3469	91.6	8386.0	2909.1	31.8
$\overset{b}{\widehat{D_{AC}}}$	1098.454	41.11	0.7543	-51.0	2597.8	1959.6	-38.4
$\overset{c}{\widehat{D_{AB}}}$	1098.468	42.51	0.7054	-36.9	1361.5	960.5	-26.0
		$\sum p_i =$	10.8148		$\sum pV^2$	17747.8	0.0

Далі маємо D_o =1098.5047 м, k^2= [pV^2]/8 = 1274.98 мм^2, *k* = 35.707 мм, m_k = 8.9 мм.

Так як різниці між обчисленими значеннями k_i перевищують m_k, то в вимірах присутні систематичні похибки. З аналізу даних табл. 2 видно, що ці систематичні похибки допущені при вимірах кута *A* або довжини сторони *a*. Після того як виявлені систематичні похибки необхідно перевизначити (переміряти) елемент *A*, якщо ж це не можливо зробити, то одержимо зміщенні оцінки: · m_{D_o}= 47.3мм, m_S = m_{L_o}= 148.08 мм, $\mu = 6.''65, f_\beta = -9''$, $f_{\overline{\beta}} = -146.1$ мм, $A' = 46^o25'42''.07,\ B' = 68^o01'12''.28,\ C' = 63^o33'02''.76;$ $f_{\hat{S}} = -2''.88, f_S = -146.1$ мм;

$m_{A'} = 1''.83,\ m_{B'} = 1''.83,\ m_{C'} = 1''.14;\ p_A = p_B = p_C = 1.770,$ p_a = 0.475, p_b=0.140, p_c = 0.171,

$A'' = 46^o25'20''.73, B'' = 68^o01'25''.92, C'' = 65^o33'08''.45, f = -4.9''; \overset{a}{\frown}{\widehat{p_A}} = 0.673, \overset{b}{\widehat{p_B}} = 0.673, \overset{c}{\widehat{p_C}} = 0.917; V_{A''} = 1''.47, V_{B''} = 1''.73, V_{C''} = 1''.70$

Зрівняні значення кутів трикутника

$A_o = 46^o25'22''.20, B_o = 68^o01'27''.65, C_o = 65^o33'10''.15;$

зрівняні значення сторін трикутника

$a_o = 795.808$ м, $b_o = 1018.691$ м, $c_o = 1000.016$ м.

За зрівняними значеннями довжин сторін за формулою (35) обчислимо контрольне значення діаметра D_o =1098.5047 м, що вказує на те, що зрівнювання відбулось абсолютно точно, сума зрівняних кутів повністю відповідає умові (2), а зрівняні сторони і кути відповідають умові (1).

Зрівняні значення кутів і довжин сторін повністю дорівнюють обчисленим значенням у роботі [2] при чому не складаються і не вирішуються нормальні рівняння при зрівнюванні параметричним і корелатним способами.

Висновки. Основні властивості способу кіл:

1. Спосіб кіл дозволяє визначити найімовірніший метричний параметр трикутника – діаметр описаного кола D_o .

2. В способі кіл ваги кутових і лінійних вимірів зв'язуються між собою через одну міру.

3. Способ кіл дозволяє виявити систематичні похибки.

4. Вирівнювання вимірів трикутника виконується з врахуванням середніх квадратичних похибок вихідних елементів, тобто вимірювання кутів m_β і вимірювання довжин сторін m_S.

5. Не має необхідності складати і вирішувати нормальні рівняння, зрівнювання можна виконати в простій програмі *EXCEL*, або в матричному вигляді.

6. В роботі було вказано, що є сторона яка неповинна одержувати поправки, а таких сторін може бути дві (а може й більше) в ланцюгу трикутників, то є продовженням цієї роботи на зрівнювання ланцюга трикутників, а також за зрівнюванням їх за координатами

Список літератури

1. Веревичев В.В. К вопросу определения весов измеренных величин при уравнивании линейно – угловой триангуляции// Инж. Геодезия. – 1975. – Вып. 18. – С 80-85.

2. Гайдаев П.А., Большаков В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1969. – 400 с.

3. Левчук Г.П., Новак В.Е., Конусов В.Г. Прикладная геодезия. Основные методы и принципы инженерно – геодезических работ. – М.: Недра, 1981 с 81.

4. Мельников О.В., Ремесленников В.Н., Романьков В.А., и др. (под общей редакцией Скорнякова Л.А.) Общая алгебра. Т. 1. – М.: Наука. Гл.ред. Физматлит, 1990. – 592 с.

5. Пряха Б.Г. Вирівнювання вільної станції// Інженерна геодезія. – 1997. – Вип. 38. – С. 94-98.

6. Рабинович Б.Н. Практикум по высшей геодезии. М.: Геодезиздат, 1961

7. Gladilin V., Siroshtan T., Sviderska T., Shudra N. Assessment of Geodetic Measurement Errors. Prospective and Priority Direction of Scientific Research in Technical and Agricultural Sciences. Primedia elaunch Boston, 2023. – 295 p. DOI10.46299/ISG.2023.MONO.TECH.3.1.1

8. Korn Granino A., Korn T.M. Handbook of mathematics for scientific workers and engineers. – McGraw-HillBook Company Inc New York, Toronto, London, 1961. – 720 p.

9. Walpole Ronald E, Myers Raymond H. Probability and Statistics for Engineers and Scientists. 3-th edition, Macmillan Publishing Company. – New York, 1985. – 639 p.

10. Gladilin V. Determining the form of error distribution of geodetic measuring Geodesy and Cartography. Vol. 48 No 2, (2022). – P. 92-95. Doi.org/10.3846/gac.2019.6692

Ph.D., associate professor **Gladilin Valeriy**,
Ph.D., associate professor **Kaminetska Oksana,**
Ph.D.,associate professor **Siroshtan Tatiana**, Assistant **Sviderska Tetyana**,
Ph.D., associate professor **Hamalii Iryna**,
Belotserkovsky National Agrarian University,
Senior Lecturer **Shudra Nataliia**, Senior Lecturer **Chulanov Petro**,
Kyiv National University of Construction and Architecture

ALGEBRAIC ADJUSTMENT OF MEASURED TRIANGLE ELEMENTS

It is difficult to align the measured elements of the triangle. A method of alignment using algebraic circles is proposed.

If six elements are measured in a triangle: angles *A*, *B*, *C*, lengths of opposite sides *a*, *b*, *c* with mean square errors m_A, m_B, m_C, m_a, m_b, m_c, the values of the equalized elements must satisfy the requirements of the equations

$$\frac{a}{\sin A} = D_A; \quad \frac{b}{\sin B} = D_B; \quad \frac{c}{\sin C} = D_C, \tag{1}$$

$$A + B + C = 180^o, \tag{2}$$

where *D* is the metric parameter of the triangle (the metric value through which the mathematical relationship between the sides and angles of the triangle is established), that is, the value of the diameter of the circle. If $D_A = D_B = D_C$, which are found by formulas (1) and condition (2) is fulfilled, then this confirms the validity of the theorem of sines.

In fact, it is a symmetrical set, because the number and composition of the upper indices corresponds to the number and composition of the lower indices, and this is a reflection of dimensions, since the triangle ABC has pairs of opposite elements: *a- A; b- B; c- C.*

Let's construct the graph *G* D_o of the diameter of the circle circumscribed around the aligned triangle, for which we will first construct the graphs *G* D_i of the diameters of the circles circumscribed around the *T*-triangles, which are shown in fig. 1, and then combine them.

Three vertices *a*, *b*, *c* form a "plane" - this is a metric field. The reflection of the metric field is the field of angular measurements - a "plane" defined by three points *A*, *B*, *C*. Note that for a measured triangle, the reflection of the metric field in the angular one is not unambiguous, so the first plane in fig. 1 is "inclined" to the second. After determining the most likely metric parameter D_o of the triangle, it is possible to bring these planes into full correspondence. That is, D_o is a "lens" [4],[8] with the help of which we obtain an unambiguous mapping of the metric field in the angular field and vice versa.

Keywords: Algebraic circles; diameter of a circumscribed circle; diameter error; errors of measured angles and measured lengths of sides

REFERENCES

1. Verevichev V.V. K voprosu opredeleniya vesov izmerennyh velichin pri uravnivanii linejno – uglovoj triangulyacii// Inzh. Geodeziya. – 1975. – Vyp. 18. – S. 80-85. {in Russian}

2. Gajdaev P.A., Bolshakov V.D. Teoriya matematicheskoj obrabotki geodezicheskih izmerenij. – M. Nedra, 1969. – 400 s. {in Russian}

3. Levchuk G.P., Novak V.E., Konusov V.G. Prikladnaya geodeziya. Osnovnye metody i principy inzhenerno – geodezicheskih rabot. – M.: Nedra, 1981 s. 81. {in Russian}

4. Melnikov O.V., Remeslennikov V.N., Romankov V.A., i dr. (pod obshej redakciej Skornyakova L.A.) Obshaya algebra. T. 1. – M.: Nauka. Gl.red. Fizmatlit, 1990. – 592 s. {in Russian}

5. Pryaha B.G. Virivnyuvannya vilnoyi stanciyi// Inzhenerna geodeziya. – 1997. – Vip. 38. – S. 94-98. {in Ukranian}

6. Rabinovich B.N. Praktikum po vysshej geodezii. M.: Geodezizdat, 1961/ {in Russian}

7. Gladilin V., Siroshtan T., Sviderska T., Shudra N. Assessment of Geodetic Measurement Errors. Prospective and Priority Direction of Scientific Research in Technical and Agricultural Sciences. Primedia elaunch Boston, 2023. – 295 p. {in English}. DOI10.46299/ISG.2023.MONO.TECH.3.1.1

8. Korn Granino A., Korn T.M. Handbook of mathematics for scientific workers and engineers. – McGraw-HillBook Company Inc New York, Toronto, London, 1961. – 720 p. {in English}

9. Walpole Ronald E, Myers Raymond H. Probability and Statistics for Engineers and Scientists. 3-th edition, Macmillan Publishing Company. – New York, 1985. – 639 r. {in English}

10. Gladilin V. Determining the form of error distribution of geodetic measuring Geodesy and Cartography. Vol. 48 No 2, (2022). – P. 92-95. Doi.org/10.3846/gac.2019.6692 {in English}