DOI: 10.32347/2786-7269.2024.7.321-336
УДК 539
к.т.н., доцент **Човнюк Ю.В.**,
ychovnyuk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-0608-0203,
к.т.н., доцент **Кравчук В.Т.**,
vtk1@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5213-3644,
доцент **Чередніченко П.П.**,
petro_che@ukr.net, ORCID: 0000-0001-7161-661X,
к.т.н., доцент **Остапущенко О.П.,**
olga_ost_17@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8114-349X,
Постернак М.М.,
posternak.mm@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0003-3804-1386,
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВДОСКОНАЛЕНИЙ АНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ МОДУЛЯЦІЙНО-ПАРАМЕТРИЧНИХ ПРОЦЕСІВ У КОЛИВНИХ СИСТЕМАХ

Обгрунтований принцип зворотності модуляційно-параметричних взаємодій, який лежить у основі ефективного управління еквівалентними імпедансами коливних систем. Наведена класифікація коливних систем, у котрих можуть існувати сили, спрямовані на зміну ефективних реактивних параметрів й дисипації. Запропонований аналітичний підхід для дослідження модуляційно-параметричних процесів у коливних і автоколивних системах, що знаходяться під впливом малих зовнішніх сигналів. Продемонстрована евристичність розуміння зворотності модуляційно-параметричних взаємодій.

Ключові слова: вдосконалення; аналітичний підхід; дослідження; модуляційно-параметричні процеси; коливні системи.

Постановка проблеми. При певних умовах у коливних системах спостерігаються зміни еквівалентних частотовизначальних (реактивних) параметрів та дисипації, наприклад: 1)при реалізації від’ємних C, L та R з використанням нелінійних коливних контурів [1-4]; 2)при зміні параметра жорсткості (внесення додатної чи від’ємної еквівалентної жорсткості механічного осцилятора ємністного чи індуктивного датчика, в т.ч. датчика гравітаційних хвиль, п’єзоелектричного резонансного датчика і т.п.) [5,6]; 3)у процесі збудження низькочастотних коливань при високочастотному неоднорідному впливі, у т.ч. збудження коливань маятника під впливом високочастотної сили [7] (наприклад, при вібраційному ущільненні бетонних/будівельних сумішей); 4)при використанні у потужних прискорювачах коливних механічних нестійкостей діафрагм, які входять до складу електричних резонаторів [8,9]; 5)при внесенні світловим потоком у оптичних індикаторах малих механічних переміщень відносно великої диференціальної жорсткості (котру умовно можна назвати “світловою жорсткістю”) як у випадку застосування дифракційних граток, так і при використанні інтерферометрів [5, 10, 11]; 6)при появі ротаційної пондеромоторної нестійкості у штучних космічних об’єктах внаслідок генерування додаткової диференціальної жорсткості [12, 13]; 7)у процесі індукування низькочастотних електромагнітних коливань у хвилеводно-діодній системі під впливом НВЧ-поля (НВЧ – надзвичайно високої частоти) [14]; 8)при утворенні низькочастотного широкосмугового від’ємного опору у НВЧ-генераторах на ЛПД (ЛПД – лавинних – прольотних діодах) [15], на ганнівських й тунельних діодах й діодах з накопиченням заряду [16], у джозефсонівських сквідах [17] та ін. [18].

У загальному випадку у коливних системах існують сили, спрямовані на зміну частотовизначальних параметрів та дисипації. Усі перераховані випадки еквівалентного (ефективного) процесу зміни реактивних і активних (дисипативних) імпедансних параметрів можна охопити загальною класифікаційною схемою: а)система є нелінійним коливним контуром (осцилятором, вібратором), у котрому можливі вимушені коливання; б)система є лінійним коливним контуром (осцилятором, вібратором), у котрому існує можливість модуляційного впливу на будь-який параметр; в)система являє собою параметричний коливний контур; г)система є автогенератором у неавтономному режимі. Вказані сили проявляють себе не тільки у електричних і радіофізичних, а також у механічних та інших системах. Механізм прояву цих сил полягає у зворотності модуляційно-параметричних взаємодій, які обумовлюють утворення замкнених кілець з позитивним або негативним зворотним зв’язком. У електричній модифікації особливий інтерес становлять C -, L -, GC - та RL - параметричні системи, які дозволяють реалізувати малошумні широкосмугасті від’ємні ємності, індуктивності й опори у широкій смузі частот.

У даному дослідженні сформульований та обгрунтований принцип зворотності модуляційно-параметричних взаємодій, проведена “дисекція” фізичного механізму, що лежить у його основі, а також продемонстрований механізм ефективного його практичного застосування.

1. <u>Принцип зворотності модуляційно-параметричних взаємодій.</u>

Параметричний спосіб накопичення, перетворення чи передачі енергії в основному зв’язують зі зміною енергоємкого параметра [19, 20]. Характерною рисою цих процесів є генерація та взаємне перетворення комбінаційних частот. Одночасно протікають немов би два протилежних процеси, які знаходяться у нерозривній єдності, − процес генерації комбінаційних частот при взаємодії заданого сигналу з параметричним елементом та у процесі “зворотного” перетворення комбінаційних частот з участю того ж параметричного елементу. На практиці ці два процеси невіддільні й взаємно обумовлені. Умовно “прямим” процесом перетворення можна вважати саме генерацію комбінаційних частот, склад котрих, як і амплітудні і фазові співвідношення, визначаються характером зовнішніх ланцюгів. Одночасно з цим, у органічній єдності, йде “зворотний” процес перетворення комбінаційних частот до вихідного спектру вхідного сигналу, а також у інші комбінаційні частоти. Цим взаємним перетворенням визначається реакція системи на вхідний сигнал чи на сигнали інших комбінаційних частот та її регенеративний чи дегенеративний вплив і відгук.

У цьому сенсі формулюється принцип зворотності модуляційно-параметричних взаємодій, зв’язаний зі взаємно зворотним перетворенням й змішуванням сигналів із участю параметричного елементу.

Цей процес може супроводжуватись зміною еквівалентних (ефективних) імпедансних параметрів. Слід відзначити, що при формуванні принципу зворотності модуляційно-параметричних взаємодій візується властивість взаємності параметричних ланцюгів, але з підкреслюванням одночасності процесів, які відбуваються, тобто процесів перетворення “туди” й “назад”. Слід також підкреслити, що у величезній кількості робіт, присвячених параметричним явищам, аналіз враховує у неявній формі процеси частотного перетворення “туди” й “назад”. Однак чітке формування принципу зворотності модуляційно-параметричних ланцюгів має евристичну цінність для вияву механізмів, котрі відбуваються у різних системах, й вибору аналітичного підходу. Це демонструється у подальшому на прикладах ефекту одночастотної невиродженої параметричної регенерації, явища збудження “квантованих” коливань впливом зовнішньої нелінійної по відношенню до координати силою та ін. Запропонований підхід робить наголос на модуляційно-параметричних взаємодіях, а не просто на параметричних, оскільки, з однієї сторони, у більш широкому плані взаємодії носять усі ознаки маніпуляцій типу амплітудних чи частотно-фазових модуляцій, а з іншої − у результаті перетворень генеруються комбінаційні частоти, котрі при наявності енергоємного параметричного елементу стають носіями енергії.

Найбільш загальний опис генерації безперервного спектру й розподілу енергії по комбінаційним частотам при взаємодіях, які відбуваються у нелінійних реактивних (енергоємних) елементах без втрат, дають класичні енергетичні співвідношення Менаі-Роу, у тому числі їх розвиток та узагальнення для комплексних параметричних елементів й більш загальних умов [21-23]. У наведеній схемі сформульованого принципу зворотності модуляційно-параметричних взаємодій ці співвідношення аналітично відображають тільки “прямий” процес перетворення й отримання комбінаційних компонент. Однак, виконуючи відповідні аналітичні дії над ними відносно частотної компоненти, яка нас цікавить, ми можемо немов би здійснити аналітично “зворотний” процес перетворення й отримати загальні уявлення про реакцію системи й про вплив сукупного спектру на ту чи іншу комбінаційну компоненту.

У відповідності до сформульованого вище принципу загальний підхід до аналізу модуляційно-параметричних явищ можна подати таким, що складається з двох основних етапів: 1)запис рівнянь системи, у котрих у явному чи неявному вигляді присутні спектр комбінаційних частот; 2)розв’язок рівнянь відносно будь-якої спектральної частоти чи сукупного спектру вхідного сигналу.

Таким чином, два паралельно й невіддільно протікаючих на практиці процеса частотного перетворення сигналів “туди” й “назад” аналітично у де-якому сенсі розділені. Перший етап запису рівнянь враховує процес “прямого” перетворення сигналу й генерацію комбінаційного спектру, а другий етап − розв’язку − дає реакцію (відгук) системи за допомогою комбінаційних частот (компонент) внаслідок їх “зворотного” перетворення.

Конкретна реалізація викладеного загального аналітичного підходу здійснюється різними способами. Ці способи можна розділити на квазіпрямі способи й способи, що використовують ті чи інші аспекти теорії збурень. Квазіпрямі способи чи прийоми розв’язку задач про вимушені коливання засновані на використанні власних функцій рівнянь, які описують власні коливання у системах з періодично змінними параметрами. Розв’язки методами теорії збурень шукаємо у часовій чи частотній формі. У більшості випадків − це асимптотичні методи, пов’язані із введенням малого параметру, квазілінійний метод чи метод гармонічного балансу у його різноманітних формах.

Теорія і практика розробки модуляційно-параметричних систем показують, що для їх дослідження найбільш зручними є спектральні методи, коли запис співвідношень здійснюється у вигляді спектральних матриць, які зв’язують комплексні амплітуди комбінаційних складових впливу та відгуку. Спектральні методи дозволяють прослідкувати внутрішню структуру сигналу й ефективно використовувати ПЕОМ для розрахунків. При цьому запису матричних рівнянь може передувати складання диференціальних рівнянь, котрі найбільш повно описують модуляційно-параметричні системи, що вивчаються.

У загальному вигляді диференціальне рівняння другого порядку, що описує нелінійну коливну систему, можна подати так:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\left(a_0+\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\right)\cdot\frac{dx}{dt}+\left(b_0+\sum_{i=1}^{\infty}b_ix_i\right)\cdot x=A\cos\left(\Omega t+\alpha\right)+\mu a\cos\left(\omega t+\gamma\right). \quad (1)$$

Ліва частина рівняння (1) може описувати пасивну коливну систему із зовнішнім вимушеним впливом чи автоколивну систему, синхронізовану гармонічним впливом $Acos\left(\Omega t+\alpha\right)$. Малий параметр $\mu<<1$ у рівнянні (1) є співвідношенням деякого модулюючого сигналу впливу $a\cos\left(\omega t+\gamma\right)$. Рівняння (1) має доволі загальний характер, оскільки більшість систем другого порядку є його частинним випадком. Крім того, підхід, викладений нижче, до розв'язку рівняння не вимагає накладання ніяких обмежень по відношенню як до збільшення порядку диференціального рівняння, так й до ускладнення закону зміни коефіцієнтів. Доволі великий клас таких законів може бути розкладений у ряд Тейлора, даючи у результаті розглядувану тут степеневу залежність.

Припускається, що у системі домінує деяке коливання, що визначається функцією X_0, й присутній нескінченний спектр комбінаційних частот $\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_k$ малої інтенсивності у порівнянні з основним коливанням, викликаний зовнішнім моделюючим впливом $\mu a\cos\left(\omega t+\gamma\right)$. Для цих умов розв'язок рівняння (1) можна записати у вигляді:

$$X=X_0+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_k\,. \quad (2)$$

Із урахуванням (2) рівняння (1) можна розбити на два рівняння:

$$\frac{d^2X_0}{dt^2}+\left(a_0+\sum_{i=1}^{\infty}a_iX_0^i\right)\cdot\frac{dX_0}{dt}+\left(b_0+\sum_{i=1}^{\infty}b_iX_0^i\right)\cdot X_0=A\cos\left(\Omega t+\alpha\right) \quad (3)$$

– відносно основних коливань,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{d^2x_k}{dt^2}+\left(a_0+\sum_{i=1}^{\infty}a_iX_0^i\right)\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{dx_k}{dt}+\\&+\left(b_0+2\sum_{i=1}^{\infty}b_iX_0^i+\sum_{i=1}^{\infty}a_iX_0^{i-1}\cdot\frac{dX_0}{dt}\right)\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_k=\mu a\cos\left(\omega t+\gamma\right)\end{aligned} \quad (4)$$

– відносно спектру комбінаційних частот.

Якщо подати функцію X_0 у гармонічній формі, тоді у першому наближенні можна отримати два скорочених диференціальних рівняння для амплітуди та фази основних коливань у системі.

Аналогічним чином можна отримати 2 скорочені диференціальні рівняння для амплітуди та фази будь-якої комбінаційної компоненти рівнянь (4).

Для практики корисним є змішаний аналітичний підхід. Записуючи рівняння системи у вигляді (3) і (4), можна уникнути необхідності розв'язку $2k$-скорочених диференціальних рівнянь для амплітуд та фаз комбінаційних компонент. Для цього коефіцієнти й оператори диференціального рівняння (4) необхідно записати у матричній комплексній формі на основі добутків коефіцієнтів рівняння у комплексній формі й експонент частот $\exp\left\{j\left(m\Omega+\omega\right)\right\}$, $j^2=-1$ [24]. Таким чином, рівняння (4) можна подати у наступній матричній комплексній формі:

$$\left[\frac{d}{dt}\right]^2\cdot\left[x\right]+\left[A_\infty\right]\cdot\left[\frac{d}{dt}\right]\cdot\left[x\right]+\left[B_\infty\right]\cdot\left[x\right]=\left[\mu a^0\right], \tag{5}$$

де: $\left[\frac{d}{dt}\right]=diag\left[-\infty,\ ...,\ j\left(\omega-k\Omega\right),\ ...,\ j\omega,\ ...,\ j\left(\omega+k\Omega\right),\ ...,\ +\infty\ \right]$ – діагональна матриця оператора диференціювання, $\left[x\right]=colon\left[-\infty,\ ...,\ x_{-k},\ ...,\ x_{+k},\ ...,\ +\infty\right]$ – матриця-стовпчик спектру комбінаційних частот, $\left[A_\infty\right],\left[B_\infty\right]$ – квадратні матриці нескінченного порядку, $\left[\mu a^0\right]=colon\left[...,\ 0,\ 0,\ \mu a,\ 0,\ 0,\ ...\right]$ – матриця модулюючого сигналу.

Таким чином, аналіз з використанням запропонованого підходу у найзагальнішому випадку має наступні послідовні етапи:

1. Визначення з рівняння типу (3) функції основних коливань X_0.
2. Вибір спектру комбінаційних частот $\left\{k\Omega+\omega\right\}$, що враховується.
3. Конкретизація матриць у рівнянні (5) із урахуванням обраного спектру комбінаційних частот.
4. Визначення вектору комбінаційних компонент $\left[x\right]$ з рівняння (5). Розрахунок шуканих параметрів з використанням знайденого вектора $\left[x\right]$, наприклад, розрахунок коефіцієнтів передачі й перетворення сигналів, розрахунок еквівалентних імпедансів та ін.

Принцип зворотності модуляційно-параметричних взаємодій вказує, що в усіх випадках маніпуляцій сигналами у резонансних системах відбувається еквівалентне накопичення чи відбір енергії, що призводить відповідно до регенеративних чи дегенеративних ефектів. Озброївшись цим принципом, можна цілеспрямовано досліджувати різноманітні ефекти при маніпуляціях сигналами й виявляти фізичні механізми їх прояву. Так, у модуляційно-параметричних резонансних системах [1-4] ефект параметричного накопичення енергії у результаті періодичної зміни енергоміського елементу збільшується у Q раз, де Q − добротність системи. У співвідношеннях ця обставина знаходить відображення у появі добутку mQ , де m − глибина модуляції енергомісткого параметру. У даному дослідженні показано, що модуляційно-параметричний канал накопичення енергії існує й у нерезонансних системах при наявності умов модуляційно-параметричного процесу зміни енергомісткого параметру, наприклад, у системах, що описуються диференціальним рівнянням першого порядку зі змінним у часі коефіцієнтом.

Еврістичну силу принципу зворотності модуляційно-параметричних взаємодій буде продемонстровано нижче на наступному прикладі.

2. Модуляційно-параметричний канал накопичення енергії при збудженні “квантових” коливань.

У [7] описане явище збудження незатухаючих коливань з дискретним рядом можливих стійких амплітуд в результаті впливу зовнішньої періодичної сили, нелінійної за координатою руху збуджуваної системи. У подальшому покажемо, що внаслідок зворотності модуляційно-параметричних взаємодій існують додаткові канали перетворення й накопичення енергії.

Аналіз проводимо на основі наступного рівняння, що описує коливання маятника під впливом зовнішньої нелінійної по координаті періодичної сили:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \sin x = \varepsilon(x) \cdot F \sin \nu t, \tag{6}$$

де: x − кут відхилення маятника від вертикалі, ω_0 − частота малих власних коливань, $2\beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 \cdot \sin x$ − функція, що враховує тертя й ангармонічність коливань, $F > 0$ − амплітуда зовнішньої сили високої частоти $\nu >> \omega_0$, $\varepsilon(x)$ − функція, що визначає розподіл цієї сили у просторі.

У відповідності із запропонованим вище підходом розв’язок рівняння (6) подамо у вигляді:

$$x = X_0 + \sum_n x_n, \tag{7}$$

де: X_0 відповідає основним коливанням маятника, $\sum\limits_n x_n$ − сума комбінаційних компонент, які генеруються при впливі зовнішньої сили на маятник.

Підставляючи (7) у (6) й враховуючи малість $\sum_n x_n$ у порівнянні з X_0, можемо записати рівняння для основних коливань:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2X_0}{dt^2}+2\beta\cdot\frac{dX_0}{dt}+\omega_0^2\sin X_0+\left[\omega_0^2\cos X_0\cdot\sum_n x_n\right]\Bigg|_{X_0}=\\&=\left[\varepsilon\left(X_0\right)\cdot F\sin\nu t\right]\Big|_{X_0}+\left[\frac{d\varepsilon\left(X_0\right)}{dx}\cdot\sum_n x_n\cdot F\sin\nu t\right]\Bigg|_{X_0}\end{aligned}\tag{8}$$

й рівняння для будь-якої l-ої комбінаційної компоненти з n-набору:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2x_l}{dt^2}+2\beta\cdot\frac{dx_l}{dt}+\left[\omega_0^2\cos X_0\cdot\sum_n x_n\right]\Bigg|_{l}=\\&=\left[\varepsilon\left(X_0\right)\cdot F\sin\nu t\right]\Big|_{l}+\left[\frac{d\varepsilon\left(X_0\right)}{dx}\cdot\sum_n x_n\cdot F\sin\nu t\right]\Bigg|_{l}\end{aligned}.\tag{9}$$

Індекси X_0 та l у (8) та (9) означають, що з відповідних членів рівнянь відбираються тільки складові з частотою основних коливань чи відповідної комбінаційної частоти. Далі припускаємо, що:

$$X_0=a\cos\left(\omega t+\varphi\right)=a\cos\theta,\tag{10}$$

$$\sum_n x_n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\cos\left[\left(\nu+n\omega\right)t+\varphi_n\right],\tag{11}$$

де: a, ω та φ − амплітуда, частота й фаза основних коливань маятника; A_n, $\left(\nu+n\omega\right)$ й φ_n − амплітуда, частота й фаза n-ої комбінаційної частоти. Частота ω дуже близька до резонансної частоти ω_0.

Функцію $\varepsilon\left(x\right)$ можна подати аналогічно різними способами, наприклад,

$$\varepsilon\left(x\right)=\begin{cases}1 \ \textit{при}\ |x|\le d,\\ 0 \ \textit{при}\ |x|>d,\end{cases}\tag{12а}$$

$$\varepsilon\left(x\right)=\exp\left(-x^2\big/\left(2d^2\right)\right),\tag{12б}$$

$$\varepsilon\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(1+\cos\dfrac{\pi}{d}x\right) \ \textit{при}\ |x|\le d,\\ 0 \qquad\qquad\qquad\ \ \textit{при}\ |x|>d,\end{cases}\tag{12в}$$

де $d << 1$ й $d << a$. При умові (10) використаємо розклад функцій у ряди Фур'є:

$$\varepsilon\left(X_0\right) = \varepsilon\left(a\cos\theta\right) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}\cos\left(2n\theta\right), \tag{13}$$

$$\frac{d\varepsilon\left(X_0\right)}{dx} = \frac{d\varepsilon\left(a\cos\theta\right)}{dx} = 2\sum_{m=1}^{\infty} b_{2m}\sin\left(2m\theta\right). \tag{14}$$

Для функції вигляду (12а) маємо наступні вирази для коефіцієнтів у (13) й (14):

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2\theta_0}{\pi},\ a_{2n} = \dfrac{1}{n\pi}\cdot\sin\left(2n\theta_0\right),\ b_{2m} = \dfrac{2}{\pi a}\cdot\dfrac{\sin\left(2m\theta_0\right)}{\sin\theta_0}, \\ \theta_0 = \arccos\left(d/a\right). \end{cases} \tag{15}$$

Підставляючи (10), (11) й (13), (14) у (8), отримаємо скорочені рівняння для амплітуди a й фази φ коливань маятника із урахуванням нескінченного спектру комбінаційних частот:

$$\frac{da}{dt} = -\beta a + \frac{G_1}{2\omega} - \frac{F}{2\omega}\cdot\left(a_{N-1} - a_{N+1}\right)\cos\left(N\varphi\right), \tag{16}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\left(\omega^2 - \tilde{\omega}_0^2\right)}{2\omega} + \frac{G_2}{2\omega a} + \frac{F}{2\omega a}\cdot\left(a_{N-1} + a_{N+1}\right)\sin\left(N\varphi\right). \tag{17}$$

де:

$$\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} = \omega_0^2\cdot\frac{I_0(a)}{a}\left[A_{1-N}\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\left(\varphi - \varphi_{1-N}\right) + A_{-1-N}\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\left(\varphi - \varphi_{-1-N}\right)\right] + \\
&+\omega_0^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^k\cdot I_{2k}\left(a\right)\cdot\left[\sum_{n=\pm1-2k-N}{}^{*}A_N\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\left(\varphi\mp 2k\varphi\mp\varphi_n\right)\right. + \\
&\left.+\sum_{n=\mp1-2k-N}{}^{*}A_N\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\left(\varphi\mp 2k\varphi\pm\varphi_n\right)\right] - F\sum_{m=1}^{\infty} b_{2m}\left[-\sum_{n=\mp1+2m}{}^{*}A_n\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\left(\varphi\mp 2m\varphi\pm\varphi_n\right)\right. + \\
&+\sum_{n=\pm1-2m}{}^{*}A_n\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\left(\varphi\mp 2m\varphi\mp\varphi_n\right) + \sum_{n=\pm1-2m-2N}{}^{*}A_n\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\left(\varphi\pm 2m\varphi\mp\varphi_n\right) - \\
&\left.-\sum_{n=\pm1-2m-2N}{}^{*}A_n\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\left(\varphi\mp 2m\varphi\mp\varphi_n\right)\right].
\end{aligned} \tag{18}$$

I_0, I_1, I_{2k} − функція Бесселя першого роду 0-го, 1-го й $2k$-го порядку, відповідно, $\tilde{\omega}_0^2 = \omega_0^2 \cdot \dfrac{2I_1(a)}{a}$ − зміна резонанскої частоти асинхронних коливань зі зміною їх амплітуди, $N = \nu/\omega$ − кратність ділення частоти у системі, Σ^* означає, що кожний член у сумі складається з двох складових відповідно для верхнього та нижнього знаку індекса n.

У режимі стаціонарних коливань $\dfrac{da}{dt} = 0$ й $\dfrac{d\varphi}{dt} = 0$.

Позначаючи $\delta_0 = 2\beta \cdot \dfrac{\omega}{\omega_0^2}$, $\delta = \dfrac{G_1}{\omega_0^2 a}$, $\xi = \dfrac{\omega^2 - \tilde{\omega}_0^2}{\omega_0^2}$, $\eta = \dfrac{G_2}{\omega_0^2 a}$, з (16) й (17) матимемо вирази для амплітуди й фази стаціонарних коливань маятника:

$$a = F \cdot \left[\omega_0 \cdot \sqrt{\left(\frac{\delta_0 - \delta}{a_{N-1} - a_{N+1}} \right)^2 + \left(\frac{\xi - \eta}{a_{N-1} + a_{N+1}} \right)^2} \right]^{-1}, \tag{19}$$

$$\varphi = \frac{1}{N} arctg \left(\frac{(\xi - \eta)}{(\delta_0 - \delta)} \cdot \frac{(a_{N-1} - a_{N+1})}{(a_{N-1} + a_{N+1})} \right). \tag{20}$$

У роботі [30] враховувались лише останні члени у рівняннях (15) й (16), а члени $G_1/(2\omega)$ й $G_2/(2\omega a)$, обумовлені комбінаційними компонентами, не приймались до уваги. У системі генерується складний спектр частот, обумовлений сильно неоднорідним впливом зовнішньої сили. При цьому у результаті зворотності модуляційно-параметричних взаємодій комбінаційні компоненти здійснюють внесення енергії як у основні коливання маятника, так і у коливання будь-якої комбінаційної частоти цього спектру. Таким чином, підтримання стаціонарних коливань у системі є інтегральним ефектом від й за допомогою нескінченного спектру комбінаційних компонент. Оскільки збудження коливань є синхронним у результаті впливу зовнішнього ВЧ-джерела, тоді розглядувана система відрізняється потужною (сильною) фазовою селективністю. Тут суттєве значення мають ті комбінаційні компоненти x_n (див.(11) й (12)), фаза φ_n котрих відповідає найбільш оптимальному накопиченню енергії у зоні впливу зовнішнього ВЧ-джерела. У цьому полягає адаптивність системи й автопідлаштування до стійкого стаціонарного режиму. Іншими словами, сумарна дія комбінаційних частот, які дають внесок на квазістаціонарній частоті коливань маятника, забезпечує фазове підлаштування цих коливань до найбільш сприятливої фази з енергетичної точки зору встановлення стаціонарного режиму. Цей перехідний процес був проаналізований за скороченими рівняннями, аналогічними (16) й (17), для певного набору комбінаційних компонент (9) та їх спільному з (16), (17) розв'язку чисельними методами. Процес встановлення стаціонарних ампдітуд a та фаз φ коливань маятника має осцилюючий швидко затухаючий характер. Спостерігаються й процеси встановлення стаціонарних режимів, за яких амплітуда й фаза продовжують "блукати" у невеликому околі деяких резонансних значень a та φ.

Цікаво зазначити, що існують l -ті комбінаційні частоти, що задовольняють умові:

$$\nu + l\omega = \pm\omega, \tag{21}$$

котрі попадають у смугу пропускання маятника як коливного ланцюга системи. Вони справляють "безпосередній" вплив на основні коливання маятника, не виключаючи при цьому й параметричного впливу внаслідок зворотності модуляційно-параметричних взаємодій. Дійсно, якщо з усього спектру комбінаційних частот враховувати лише l-ті складові, які задовольняють умові (21), тобто $l = \pm 1 - N$, тоді у виразі (18) нескінченні суми пропадають й він приймає вигляд:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} &= \omega_0^2 \cdot \Bigg\{ \left[I_0(a) \pm I_2(a) \right] \cdot A_{1-N} \cdot \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (\varphi - \varphi_{1-N}) \Bigg\} + \\
&+ \left[I_0(a) \pm I_2(a) \right] \cdot A_{-1-N} \cdot \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (\varphi + \varphi_{-1-N}) \Bigg\} \Bigg\} - \\
&- \frac{F}{2} \cdot \Bigg\{ (b_N - b_{N+2}) \cdot \Bigg[A_{1-N} \cdot \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \left[(N+1)\varphi - \varphi_{1-N} \right] \Bigg\} + \\
&+ A_{-1-N} \cdot \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \left[(N+1)\varphi + \varphi_{-1-N} \right] \Bigg\} \Bigg] + (b_{N-2} - b_N) \cdot \Bigg[A_{1-N} \cdot \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \left[(N-1)\varphi + \varphi_{1-N} \right] \Bigg\} + \\
&+ A_{-1-N} \cdot \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \left[(N-1)\varphi - \varphi_{-1-N} \right] \Bigg\} \Bigg] \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Для визначення стаціонарних амплітуд й фаз двох врахованих комбінаційних компонент $X_{1-N} = A_{1-N} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{1-N})$ й $X_{-1-N} = A_{-1-N} \cdot \cos(-\omega t + \varphi_{-1-N})$ рівняння (8), слідуючи викладеному вище підходу, можемо записати у комплексному матричному вигляді:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^c_{1-N} \\ x^c_{-1-N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j\beta\omega & 0 \\ 0 & -j\beta\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^c_{1-N} \\ x^c_{-1-N} \end{bmatrix} + \\
&+\begin{bmatrix} \omega_0^2 \cdot I_0(a) & -\omega_0^2 \cdot I_2(a) \cdot e^{-j\cdot 2\varphi} \\ -\omega_0^2 \cdot I_2(a) \cdot e^{j\cdot 2\varphi} & \omega_0^2 \cdot I_0(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^c_{1-N} \\ x^c_{-1-N} \end{bmatrix} - \\
&-\frac{F}{2} \cdot \begin{bmatrix} b_N \cdot \left(e^{jN\varphi} + e^{-jN\varphi}\right) & \left[b_{N-2} \cdot e^{j(N-2)\varphi} + b_{N+2} \cdot e^{-j(N+2)\varphi}\right] \\ \left[b_{N+2} \cdot e^{j(N+2)\varphi} + b_{N-2} \cdot e^{-j(N-2)\varphi}\right] & b_N \cdot \left(e^{jN\varphi} + e^{-jN\varphi}\right) \end{bmatrix} \times \qquad (23) \\
&\times \begin{bmatrix} x^c_{1-N} \\ x^c_{-1-N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0^2 \cdot I_1(a) \cdot e^{j\varphi} + j\dfrac{F}{2}\left[a_{N+1}e^{j(N+1)\varphi} - a_{N-1}e^{-j(N-1)\varphi}\right] \\ \omega_0^2 \cdot I_1(a) \cdot e^{-j\varphi} + j\dfrac{F}{2}\left[a_{N-1}e^{j(N-1)\varphi} - a_{N+1}e^{-j(N+1)\varphi}\right] \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

де x^c_{1-N} й x^c_{-1-N} − комплексні величини. Підставляючи знайдені з (23) параметри $A_{\pm 1-N}$ й $\varphi_{\pm 1-N}$ у (12), з (9), (10) можна визначити можливий дискретний спектр стаціонарних амплітуд й фаз коливань маятника.

Таким чином, аналіз показав, що, крім основного модуляційного каналу [30], існує й параметричний канал накопичення енергії у системі. Розглядувану систему можна зарахувати у ще слабко розроблений клас нелінійних модуляційно-параметричних систем. Кількісний аналіз, проведений чисельними методами (на ПЕОМ) на основі рівнянь (12а) й (15)-(20), показав наступне. Врахування наявності модуляційно-параметричного каналу накопичення енергії робить механізм фазового автопідлаштування, що лежить у основі енергообміну й підтримання незатухаючих коливань у системі, більш гнучким. При цьому, з однієї сторони, суттєво уточнюється дискретний ряд можливих стійких амплітуд, а з іншої − коливання у системі проявляють більшу незалежність від випадкових змін зовнішніх факторів, а також добротності коливного ланцюга й амплітуди сили впливу у широких межах.

Висновки.

1. Сформульований принцип зворотності модуляційно-параметричних взаємодій, який дає ключ до аналізу закономірностей, що мають місце при маніпуляціях сигналами у різноманітних радіофізичних й фізіко-технічних системах, а також − до пошуку різноманітних ефектів у конкретних коливних системах.

2. Модуляційно-параметричні взаємодії при певних умовах призводять до ефективної зміни величини й знаку частотовизначальних (реактивних) параметрів й дисипації, до появи нових перетворювальних властивостей й закономірностей.

3. Коливні системи можуть бути класифіковані із урахуванням умов появи сил, спрямованих на зміну еквівалентних реактивних параметрів й дисипації.

4. Запропонований аналітичний підхід для дослідження модуляційно-параметричних явищ можна застосовувати як до аналізу перетворюючих й підсилюючих режимів у системах із зовнішньою накачкою, так й до автодинних, перетворюючим та іншим процесам й режимам у автономних й неавтономних генераторних системах. Цей підхід сполучає переваги аналітичних методів, заснованих на диференціальних рівняннях, найбільш повно й точно описуючих об'єкти, явища, котрі вивчаються, з комплексними спектральними методами, що дають найбільш компактний запис рівнянь, ясне фізичне трактування внутрішньої структури сигналів й полегшують математичний аналіз.

5. Подане у загальному плані питання про ефективне управління відеочастотними імпедансами й перетворювальними властивостями з використанням модуляційно-параметричних явищ та ефектів у радіофізичних та фізико-технічних системах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Герценштейн М.Е, Левинзон Ф.А., Белов А.А., Тетельбаум Б.И. Радиотехника и электроника. 1971. Т.16. С. 990-995.

2. Дамгов В.Н. Болгарский физический журнал. 1978. Т.5. С. 519-534.

3. Damgov V.N. Proc. IEEE Intern. Symposium on Circuits and Systems, Rome, Italy, 1982. V.3. P.190-193.

4. Damgov V.N. Adv. Space Res. 1991. V.11. P. 405-408.

5. Брагинский В.Б., Манукин А.Б. Измерение малых сил в физических экспериментах. М.: Наука, 1974.

6. Дамгов В.Н., Дубошинский Д.Б., Дубошинский Я.Б. Электропромышленность и приборостроение. София. 1989. Т. 25. С. 2-5.

7. Дамгов В.Н. Украинский физический журнал. 1993. Т.38. С. 470-479.

8. Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1990.

9. Мирошин Р., Халидов И. Теория локального взаимодействия. Санкт-Петербург: Изд-во С.-П. ун-та, 1991.

10. Волосов В., Калинцев А. Нелинейно-оптические преобразователи частоты. М.: Машиностроение, 1991.

11. Гиббс Х. Оптическая бистабильность. М.: Мир, 1988.

12. Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1985.

13. Петров Г. Аэромеханика больших скоростей и космические исследования. М.: Наука, 1991.

14. Пренцлау Н.Н., Дмитриев В.М., Бобрышев В.Д. Радиотехника и электроника. 1979. Т. 24. С. 1702-1704.

15. Gonda I. IEEE Trans. MTT. V. 25. P.343-352.

16. Коростелев Г.Н., Сотов Л.С. Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34. С. 1925-1929.

17. Лихарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985.

18. Самсон А.М., Котомцев Л.А., Лойко Н.А. Автоколебания в лазерах. Минск: Наука и техника, 1990.

19. Полупроводниковые параметрические усилители и преобразователи / Под ред. В.С. Эткина. М.: Радио и связь, 1983.
20. Новожилов О.П. Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. С. 2424-2426.
21. Бирюк Н.Д., Дамгов В.Н. Доклады Болгарской АН. 1985. Т. 38. С. 567-570.
22. Бирюк Н.Д., Дамгов В.Н. Известия вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. С. 665-668.
23. Бирюк Н.Д., Дамгов В.Н., Епифанцев Ю.Ф. Электричество. 1991. Т. 2. С. 63-65.
24. Damgov V.N. IEE Proc. Electronic Circuits and Systems. 1984. V. 131. P.1-9.
25. Выставкин А.Н., Губанков В.Н., Кузьмин Л.С. и др. Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26. С. 1706-1719.
26. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. М.: Мир, 1985.
27. Дамгов В.Н., Георгиев П.Г., Русева Г.А. Радиотехника и электроника. 1984. Т.29. С. 465-472.
28. Дамгов В.Н. Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30. С. 524-533.
29. Дамгов В.Н., Ценов М.Н. Болгарский физический журнал. 1984. Т.11. С. 312-321.
30. Вайнштейн Л.А., Дубошинский Я.Б. Журнал технической физики. 1978. Т. 7. С. 1321-1325.

Ph.D., Associate Professor **Chovnyuk Yurii**,
Ph.D., Associate Professor **Kravchyuk Volodymyr**,
Associate Professor **Cherednichenko Petro**,
Ph.D., Associate Professor **Ostapushchenko Olga,**
Senior Lecturer **Posternnak Mykhailo,**
Kyiv National University of Construction and Architecture, Ukraine

AN IMPROVED ANALYTICAL APPROACH FOR MODULATION-PARAMETRIC PROCESSES IN OSCILLATING SYSTEMS RESEARCH

Reversibility principle of modulation-parametric interactions is formed, which is the basis for effective control of equivalent impedances in oscillation systems. A classification of oscillating systems in which there may be forces aimed at changing the effective reactive parameters and dissipation is given. Analytical approach for the study of modulation and parametric processes in oscillation and self-oscillation systems under the small external signals influence is proposed. The heuristics of understanding the modulation-parametric interactions reversibility are demonstrated. On the basis of the formulated and substantiated principle of reversibility of modulation-parametric interactions, a “dissection” of the physical mechanism underlying it was carried out, and also demonstrated the mechanism of its effective practical application. The analytical approach implemented in the work combines the advantages of analytical methods based on differential equations, which most fully and accurately describe the objects and phenomena under study, with complex spectral methods,

which provide the most compact notation of equations, a clear physical interpretation of the internal structure of signals and facilitate mathematical analysis.

Key words: improvement; analytical approach; research; modulation-parametric processes; oscillation systems.

REFERENCES

1. Hertsenshtein M.E, Levynzon F.A., Belov A.A., Tetelbaum B.Y. Radyotekhnyka y elektronyka. 1971. T.16. S. 990-995. {in Russian}

2. Damhov V.N. Bolharskyi fyzycheskyi zhurnal. 1978. T.5. S. 519-534. {in English}

3. Damgov V.N. Proc. IEEE Intern. Symposium on Circuits and Systems, Rome, Italy, 1982. V.3. P. 190-193. {in English}

4. Damgov V.N. Adv. Space Res. 1991. V.11. P. 405-408. {in English}

5. Brahynskyi V.B., Manukyn A.B. Yzmerenye malykh syl v fyzycheskykh eksperymentakh. M.: Nauka, 1974. {in Russian}

6. Damhov V.N., Duboshynskyi D.B., Duboshynskyi Ya.B. Elektropromyshlennost y pryborostroenye. Sofyia. 1989. T.25. S. 2-5. {in English}

7. Damhov V.N. Ukraynskyi fyzycheskyi zhurnal. 1993. T.38. S. 470-479. {in Russian}

8. Bruk H. Tsyklycheskye uskorytely zariazhennykh chastyts. M.: Atomyzdat, 1990. {in Russian}

9. Myroshyn R., Khalydov Y. Teoryia lokalnoho vzaymodeistvyia. Sankt-Peterburh: Yzd-vo S.-P. un-ta, 1991. {in Russian}

10. Volosov V., Kalyntsev A. Nelyneino-optycheskye preobrazovately chastoty. M.: Mashynostroenye, 1991. {in Russian}

11. Hybbs Kh. Optycheskaia bystabylnost. M.: Myr, 1988. {in Russian}

12. Beletskyi V.V., Khentov A.A. Vrashchatelnoe dvyzhenye namahnychennoho sputnyka. M.: Nauka, 1985. {in Russian}

13. Petrov H. Aeromekhanyka bolshykh skorostei y kosmycheskye yssledovanyia. M.: Nauka, 1991. {in Russian}

14. Prentslau N.N., Dmytryev V.M., Bobrыshev V.D. Radyotekhnyka y elektronyka. 1979. T. 24. S. 1702-1704. {in Russian}

15. Gonda I. IEEE Trans. MTT. V. 25. P. 343-352. {in English}

16. Korostelev H.N., Sotov L.S. Radyotekhnyka y elektronyka. 1989. T. 34. S. 1925-1929. {in Russian}

17. Lykharev K.K. Vvedenye v dynamyku dzhozefsonovskykh perekhodov. M.: Nauka, 1985. {in Russian}

18. Samson A.M., Kotomtsev L.A., Loiko N.A. Avtokolebanyia v lazerakh. Mynsk: Nauka y tekhnyka, 1990. {in Russian}

19. Poluprovodnykovye parametrycheskye usylytely y preobrazovately/ Pod red. V.S. Etkyna. M.: Radyo y sviaz, 1983. {in Russian}

20. Novozhylov O.P. Radyotekhnyka y elektronyka. 1988. T. 33. S. 2424-2426. {in Russian}

21. Byriuk N.D., Damhov V.N. Doklady Bolharskoi AN. 1985. T. 38. S. 567-570. {in English}

22. Byriuk N.D., Damhov V.N. Yzvestyia vuzov. Radyofyzyka. 1985. T. 28. S. 665-668. {in Russian}

23. Byriuk N.D., Damhov V.N., Epyfantsev Yu.F. Elektrychestvo. 1991. T. 2. S. 63-65. {in Russian}

24. Damgov V.N. IEE Proc. Electronic Circuits and Systems. 1984. V. 131. P. 1-9. {in English}

25. Vystavkyn A.N., Hubankov V.N., Kuzmyn L.S. y dr. Radyotekhnyka y elektronyka. 1981. T. 26. S. 1706-1719. {in English}

26. Dzhouns U., Tron V. Nepreryvnye droby. Analytycheskaia teoryia y prylozhenyia. M.: Myr, 1985. {in Russian}

27. Damhov V.N., Heorhyev P.H., Ruseva H.A. Radyotekhnyka y elektronyka. 1984. T.29. S. 465-472. {in Russian}

28. Damhov V.N. Radyotekhnyka y elektronyka. 1985. T. 30. S. 524-533. {in Russian}

29. Damhov V.N., Tsenov M.N. Bolharskyi fyzycheskyi zhurnal. 1984. T.11. S. 312-321. {in English}

30. Vainshtein L.A., Duboshynskyi Ya.B. Zhurnal tekhnycheskoi fyzyky. 1978. T. 7. S. 1321-1325. {in Russian}