DOI: 10.32347/2786-7269.2023.5.286-305
УДК 528.482.5
канд. техн. наук **Гладілін В.М.**,
vgladilin@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0492-3510,
д-р техн наук **Мазницький А.С.**,
amaznitskyi@gmail.com, ORCID: 0009-0000-3527-2442,
канд екон. наук **Сіроштан Т.М.**,
tanya3031@i.ua, ORCID: 0000-0001-6791-7081,
Свідерська Т.О., tsv245@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7623-6958,
канд. геогр. наук **Гамалій І.П.**,
gurgev@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3469-4798,
Білоцерківський національний аграрний університет,
Шудра Н.С., shudranatasha1984@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5416-7680,
Чуланов П.О., chulanov.po@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-6735-3770,
Київський національний університет будівництва та архітектури

ВЛАСТИВОСТІ ІСТИННИХ ПОХИБОК ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ В АЛГЕБРАЇЧНОМУ КОЛІ

Істинні похибки можливо знайти коли ми знаємо істинне значення вимірюваної величини. В геодезичних вимірах та і в будь – яких інших вимірюваннях істинне значення вимірюваної величини невідоме, тому приймається якесь найбільш ймовірне значення цієї величини, сума ймовірних похибок повинна дорівнювати нулю, сума істинних похибок повинна дорівнювати нулю, тому необхідно дослідити ймовірні та істинні похибки в алгебраїчному колі.

Розглядається новий метод оцінки точності вимірів він відрізняється від традиційних тим, що в результаті обробки вимірів однієї величини одержують не тільки загальну середню квадратичну похибку, а й середні квадратичні похибки всіх вимірів.

Ключові слова: Алгебраїчне коло; замкнена система; істинні похибки; похибки вимірювань; генеральна дисперсія; середня дисперсія; випадкові величини.

Характер істинних похибок проявляється в замкнених системах, кожний (будь – який) елемент замкненої системи нейтральний та протилежний для всіх інших елементів і може бути початком та кінцем системи, що є диз’юнктивним (вільним) поєднанням елементів які вибираються. Тому просту, замкнену систему можна розглядати як алгебраїчне коло елементів, розміри яких виміряні не точно, а з якоюсь похибкою.

Означення 1. Множина всіх елементів замкненої системи називається колом ***К***, якщо алгебраїчна сума значень цих елементів є істинною фізичною величиною.

Означення 2. Множина всіх елементів замкненої системи називається колом ***М***, якщо алгебраїчна сума значень цих елементів дорівнює нулю.

В колі ***К*** і колі ***М*** розглянемо їх власні підмножини, дуги D і $\overline{D}$ які протилежні між собою і такі, що

$$D \subset K, \overline{D} = K \setminus D; \; D \subset M, \overline{D} = M \setminus D. \tag{1}$$

Теорема. Якщо елементи системи створюють коло ***К*** або коло ***М***, тоді алгебраїчна сума їх істинних похибок дорівнює нулю, а алгебраїчні суми похибок елементів будь – яких двох протилежних дуг D і $\overline{D}$, кола ***К*** або кола ***М***, будуть однакові за модулем і мати протилежні знаки.

Доведення. Нехай X_1, X_2, . . ., X_n – істинні значення елементів кола ***К*** або кола ***М***; x_1, x_2, . . ., x_n – наближені (виміряні) значення елементів; Δ_1, Δ_2, . . ., Δ_n – істинні похибки елементів.

Якщо C – алгебраїчна сума істинних значень елементів кола ***К***, або C =0 у колі ***М***, тоді можна записати

$$\{ \Delta_3 = x_3 - X_3 \tag{2}$$

Складемо праві і ліві частини цих рівнянь, одержимо:

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n = x_1 + x_2 \ldots + x_n - (X_1 + X_2 + \ldots + X_n).$$

Тут алгебраїчна сума елементів буде

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} X_i = C, \tag{3}$$

тоді сума істинних похибок елементів буде

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = 0. \tag{4}$$

Розіб'ємо коло ***К*** або коло ***М*** на дві протилежні дуги D і $\overline{D}$ (вільними чином), введемо позначення

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_k = X_D \\ X_{k+1} + X_{k+2} + \cdots + X_n = X_{\overline{D}} \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_D \\ x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_k = x_{\overline{D}} \\ \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_k = \Delta_D \\ \Delta_{k+1} + \Delta_{k+2} + \cdots + \Delta_n = \Delta_{\overline{D}} \end{cases}. \tag{5}$$

Тоді істинні похибки дуг D і $\overline{D}$ визначаться як

$$\Delta_D = x_D - X_D \tag{6}$$

$$\Delta_{\overline{D}} = x_{\overline{D}} - X_{\overline{D}} \tag{7}$$

Складемо ліві і праві частини рівнянь (6) і (7), одержимо

$$\Delta_D + \Delta_{\bar{D}} = x_D + x_{\bar{D}} - (X_D + X_{\bar{D}}).$$

Але за визначенням

$$x_D + x_{\bar{D}} = X_D + X_{\bar{D}},$$

тому

$$\Delta_D = -\Delta_{\bar{D}},$$
$$|\Delta_D| = |-\Delta_{\bar{D}}|,$$

або

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_k = -(\Delta_{k+1} + \Delta_{k+2} + \cdots + \Delta_n),$$

$$|\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_k| = |-(\Delta_{k+1} + \Delta_{k+2} + \cdots + \Delta_n)|$$

Візьмемо всі зрівняні внутрішні або зовнішні кути β_1, β_2, β_3, . . ., β_n замкненого полігонометричного (або теодолітного) ходу, які створюють коло ***K***, тому що відома їх істинна сума: $C = \pi(n-2)$ – для внутрішніх кутів, або $C = \pi(n+2)$ – для зовнішніх кутів.

Якщо Δ_1, Δ_2 Δ_3, . . ., Δ_n – істинні похибки кутів, тоді за теоремою (4) виходить

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = 0.$$

Наприклад, візьмемо всі зрівняні перевищення h_1, h_2, h_3, . . ., h_n замкненого нівелірного ходу. Множина всіх перевищень створює коло ***M***, тому що алгебраїчна сума перевищень повинна дорівнювати нулю, тобто $\sum_{i=1}^{n} h_i = 0$. Зауважимо, що нівелірні ходи I, II і III класів вимірюються в прямому і зворотному напрямках, тобто їх розглядаємо як замкнені системи. Допустимо, що Δ_1, Δ_2, Δ_3, . . ., Δ_n – істинні похибки перевищень, тоді також (4)

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = 0.$$

Коли розбили коло ***M*** на дві протилежні дуги D і $\bar{D}$, спочатку візьмемо з ***M*** будь – які перевищення, в кількості від одного до n -1 перевищення, незалежно від порядку перевищень в ході. Ця множина перевищень створить дугу D – вільно вибрану, а множина перевищень яка залишиться, створить протилежну дугу $\bar{D}$, з теореми виходить, що алгебраїчна сума всіх істинних похибок перевищень замкненого ходу дорівнює нулю $\sum_{i=1}^{n} h_i = 0$, а алгебраїчні суми істинних похибок дуг D і $\bar{D}$, мають рівні модулі і протилежні знаки.

Для визначення планових координат x та y пунктів полігонометричних (теодолітних) ходів визначають прирости координат за відомими формулами

$$\begin{cases} \Delta_x = d \cdot \cos\alpha \\ \Delta_y = d \cdot \sin\alpha \end{cases}, \qquad (8)$$

де d – виміряні відстані (горизонтальні прокладання) між суміжними пунктами, координати яких визначаються; α – зрівняні дирекційні кути, які приведені до кола ***M***.

Зрівнюємо прирости координат приводячи їх до кола ***M*** в замкненому ході, таким чином, що

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} \Delta y_i = 0 \end{cases}, \tag{9}$$

де n – кількість визначаємих пунктів.

Вводячи поправки в прирости координат ми тим самим зрівнюємо довжини виміряних відстаней між суміжними пунктами.

Зауважимо, що кола ***M*** таким же чином утворюють зрівняні прирости координат точок замкненого (і не обов'язково замкненого, якщо можна привести до кола ***M***, тобто всі геодезичні побудови є замкнені між собою) полігонометричного (теодолітного) ходу, сума яких дорівнює нулю.

Істинні похибки не накопичуються в сумах елементів замкнутої зрівняної системи. Якщо рівно точно виміряти кути замкненого полігонометричного (теодолітного) ходу, а потім їх зрівняти і якщо відома середня квадратична похибка зрівнювання кутів m_β, тоді всі дирекційні кути сторін полігонометричного (теодолітного) ходу мають таку ж середню квадратичну помилку $m_\alpha = m_\beta$. Аналогічно, якщо в замкненому нівелірному ході рівно точно виміряні перевищення з середньою квадратичною похибкою m_h зрівняного перевищення, тоді всі висоти (відмітки) пунктів (реперів) будуть мати таку ж середню квадратичну похибку $m_H = m_h$. Якщо рівно точно виміряні відстані між пунктами і при зрівнюванні одержано середню квадратичну похибку визначення відстаней m_d, то середні квадратичні похибки приростів координат при рівному впливі точності лінійних і кутових вимірювань будуть

$$\begin{cases} m_{\Delta x} = \sqrt{\frac{m_d^2}{2} + \frac{d^2 \cdot m_\alpha^2}{2 \cdot \rho^2}}, \\ m_{\Delta y} = \sqrt{\frac{m_d^2}{2} + \frac{d^2 \cdot m_\alpha^2}{2 \cdot \rho^2}} \end{cases}$$

(10)

В ці формули входять середні квадратичні похибки визначення довжин ліній m_d і дирекційних кутів m_a.

Приведена теорема встановлює особливість розподілу істинних похибок. Доведено, що алгебраїчна сума істинних похибок елементів замкненої зрівняної системи дорівнює нулю

Середня дисперсія як загальна характеристика розсіювання випадкової виміряної величини

Новий підхід до оцінки точності вимірювань започатковано в праці [6], в якій наводиться дисперсія σ_x^2 значення x дискретної випадкової величини. Доведено, що середня дисперсія v_0^2 і генеральна дисперсія σ^2 мають таку залежність:

$$v_0^2 = 2\sigma^2 \tag{11}$$

Невирішеною проблемою є встановлення властивостей середньої дисперсії. Ціль – встановити суть цієї характеристики розсіювання дискретної величини *X*.

Величину X, що має значення $x = X$ будемо розглядати як таку, що розсіюється не лише відносно генерального середнього значення $E(X) = \mu$, а і відносно окремих значень x_i цієї випадкової величини. Якщо за центр розсіювання випадкової величина прийняти математичне сподівання $E(X) = \mu$, тоді характеристикою її розсіювання буде генеральна дисперсія

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x), \tag{12}$$

де $f(x)$ – функція розподілу ймовірностей [5].

Якщо за центр розсіювання величини X взяти якесь значення x_i із групи G генеральної сукупності [3], то приходимо до такого означення дисперсії значення x_i випадкової величини:

$$\sigma_{xi}^2 = E[(X-x_i)^2] = \sum_x (x-x_i)^2 f(x).$$

(13)

З порівняння залежностей (12), (13) виходить, що генеральна дисперсія σ^2 і дисперсія $\sigma_{x_i}^2$ мають однакове алгебраїчне відображення. Втім, на справді, ці дві характеристики мають різні властивості. Щоб довести це, розглянемо сукупності в яких визначаються ці дві характеристики.

Дисперсія σ^2 визначається за сукупністю (обсягу $k+1$):

$$C' = (\mu, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{k-1}, x_k),$$

Дисперсію σ_{xi}^2 обчислюють за генеральною сукупністю

$$C \quad = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{k-1}, x_k).$$

Генеральна дисперсія

$$\sigma^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \mu)^2$$

є квадратом середньої квадратичної різниці генерального середнього μ і показників усіх вимірів, оскільки в цьому рівнянні величина $\sum_x (x-\mu)^2$ є сумою k квадратів різниць, а дисперсія

$$\sigma_{xi}^2 = \frac{1}{k}\sum_{xj}\left(x_j - x_i\right)^2 \;\; (j \mid i = 1, 2, \dots, k,\; j \neq i\;) \tag{14}$$

не є квадратом середньої квадратичної різниці значення x_i величини X і значень, що доповнюють x_i до X, тому що $\sum_{x_j}(x_j - x)^2$ в залежності (14) утворена $k-1$ квадратами різниць.

Буває, що генеральна сукупність має великий обсяг k_G групи G. Тоді дисперсію значення x величини X обчислюють за теоремою [1]

$$\sigma_x^2 = \sigma^2 + (x-\mu)^2 \qquad (15)$$

Генеральна дисперсія визначається за такою теоремою [1]:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k_G} \sigma_{xi}^2 f(x_i)}{2} \;\; (i = 1, 2, \ldots, k_G), \qquad (16)$$

де $f(x_i)$ – імовірність значення x_i групи G. Оскільки, обсяг k_G дорівнює обсягу «значень» величини *X,* то з залежності (16) випливає:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_x \sigma_x^2 f(x)}{2}.$$

Врахувавши залежність (11), одержимо таке правило визначення середньої дисперсії величини X:

$$\nu_0^2 = \sum_x \sigma_x^2 f(x).$$

Твердження 1. *Середня дисперсія* ν_0^2 *– це поле розсіювання* σ_x^2 *величини* X *відносно таких значень:* $x = \mu - \sigma$, $x = \mu + \sigma$.

Доведення. Якщо є генеральна сукупність вимірів однієї величини, то, згідно аксіоми теорії похибок вимірювань [3], випадкова величина X набуває множину значень в такому обмеженому замкненому інтервалі:

$$\left[x_{min} - \frac{[Q]}{2}, x_{max} + \frac{[Q]}{2}\right] \qquad (17)$$

де $x_{\min}, x_{\max}$ – найменше і найбільше значення вимірів; [Q] – ступінь квантування вимірів [4].

Отже, величина X може мати такі значення в межах: $x = \mu - \sigma$, $x = \mu + \sigma$. Визначимо за правилом (15) розсіювання σ_x^2 цих значень, одержимо

$$\sigma_x^2 = \sigma^2 + (x-\mu)^2 = \sigma^2 + (\mu - \sigma - \mu)^2 = 2\sigma^2 = \nu_0^2;$$
$$\sigma_x^2 = \sigma^2 + (x-\mu)^2 = \sigma^2 + (\mu + \sigma - \mu)^2 = 2\sigma^2 = \nu_0^2,$$

то твердження доведено.

Середню дисперсію ν_0^2 визначають в генеральних сукупностях вимірів, тобто в сукупностях, які характеризуються наповненістю $F=1$ і такою добротністю *Q*, що дозволяє надійно встановити функцію $f(x)$ розподілу ймовірностей [3]. Якщо в процесі вимірювань однієї величини набрано сукупність вимірів, яка має великий обсяг k, значну добротність Q, але наповненість сукупності $F < 1$ тобто проекція сукупності не є повною групою G вимірів, то ця сукупність вимірів може розглядатися лише як випадкова вибірка, що репрезентує генеральну сукупність. Тоді визначають вибіркове середнє (просту арифметичну середину) $\bar{x}$, та наближене значення v^2 характеристики v_0^2 розсіювання величини X [1] за формулою (11)

$$v^2 = 2s^2, \quad (18)$$

де s^2 – це вибіркова дисперсія [2]. Дисперсія v^2 є оцінкою для середньої дисперсії v_0^2. Від відповідності (15) приходимо до такого правила [1]:

$$s_x^2 = s^2 + (x - \bar{x})^2. \quad (19)$$

Оскільки, залежності (15), (19) є однаковими алгебраїчними відповідностями, то величина v^2 дорівнює вибірковій дисперсії s_x^2 значень $x = \bar{x} - s,\ x = \bar{x} + s$ вибірки.

Приклад 1. У таблиці наведено ряд розподілу генеральної сукупності вимірів перевищення за зростанням між двома реперами нівелірного ходу [1].

Потрібно визначити дисперсії $\sigma_s^2; \sigma_t^2$ значень $x_s = \mu + \sigma; x_t = \mu - \sigma$ випадкової величини та порівняти ці дисперсії з середньою дисперсією v_0^2.

Таблиця 1.

Ряд розподілу генеральної сукупності вимірів

X h(мм)	$x_{(1)}$ 1,3	$x_{(2)}$ 1,4	$x_{(3)}$ 1,5	$x_{(4)}$ 1,6	$x_{(5)}$ 1,7	$x_{(6)}$ 1,8	$x_{(7)}$ 1,9
$f(x)$ $p(x)$	$f(x_{(1)})$ 0,01	$f(x_{(2)})$ 0,03	$f(x_{(3)})$ 0,18	$f(x_{(4)})$ 0,49	$f(x_{(5)})$ 0,23	$f(x_{(6)})$ 0,04	$f(x_{(7)})$ 0,02
k_G	1	2	3	4	5	6	7

Генеральна сукупність має обсяг вимірів $k = 100$, а обсяг «значень» генеральної сукупності $k_G = 7$. Ступінь квантування вимірів [Q] =0.1 мм. Розмах вимірів R = 1.9 – 1.3 = 0.6 мм. Характеристика положення випадкової величини $\boldsymbol{\mu = 1.60}$ мм. Характеристики її розсіювання:

$$\sigma^2 = 0{,}0095 \text{ мм}^2;\ v_0^2 = 2\sigma^2 = (2)(0{,}0095) = 0{,}019 \text{ мм}^2.$$

Випадкова величина X набуває множину значень в такому обмеженому замкненому інтервалі:

$$x_{min} - \frac{[Q]}{2};\ x_{max} + \frac{[Q]}{2} = x_1 - \frac{[Q]}{2};\ x_7 + \frac{[Q]}{2} = [1.25 \div 1.95],$$

відповідно довірчий інтервал для величини X має вигляд з довірчою ймовірністю одиниця:

$$P(1{,}25 \text{ мм} \le X \le 1{,}95 \text{ мм}) = 1.$$

Одержимо:

$$\boldsymbol{x_s = \mu + \sigma = 1{,}61 + 0{,}0975 = 1{,}7075}\text{мм};\ \boldsymbol{x_t = \mu - \sigma = 1{,}61 - 0{,}0975 = 1{,}5125}\text{мм}.$$

$$\sigma_{x_s}^2 = \sigma^2 + (x_s - \mu)^2 = 0{,}0095 + (1{,}7075 - 1{,}61)^2 = 0{,}019 \ \text{мм}^2 = \nu_0^2.$$

$$\sigma_{x_t}^2 = \sigma^2 + (x_t - \mu)^2 = 0{,}0095 + (1{,}5125 - 1{,}61)^2 = 0{,}019 \ \text{мм}^2 = \nu_0^2.$$

Розглянемо функцію щільності розподілу величини X з середнім значенням μ і дисперсією σ^2 для нормального закону розподілу [5]

$$n(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{20}$$

Твердження 2. Якщо величина X нормально розподілена, має середню дисперсію ν_0^2, то для значень $x = \mu \pm a\sigma$ функція щільності розподілу випадкової величини матиме такий вигляд:

$$n(x = \mu \pm a\sigma; \mu, \nu_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\nu_0} e^{-a^2/2}.$$

Доведення. З теореми (15) [1] випливає, що

$$(x-\mu)^2 = \sigma_x^2 - \sigma^2. \tag{21}$$

Врахувавши залежності (11), (21), одержимо

$$-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2 = -(1/2)(\sigma_x^2 - \sigma^2)/\sigma^2 = -\sigma_x^2/2\sigma^2 + \sigma^2/2\sigma^2 = 1/2 - \sigma_x^2/\nu_0^2.$$

От же, функція (20) приводиться до такого вигляду:

$$n(x;\mu,\nu_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\nu_0} e^{1/2 - \sigma_x^2/\nu_0^2}, \quad -\infty < x < \infty \tag{22}$$

Для значень $x = \mu$; $x = \mu \pm \sigma$; $x = \mu \pm 2\sigma$; ..., $x = \mu \pm a\sigma$ випадкої величини, в відповідності з правилами (11), (15) одержимо такі дисперсії:

$$\sigma_{x=\mu}^2 = 1/2\nu_0^2;\ \sigma_{x=\mu\pm\sigma}^2 = \nu_0^2;\ \sigma_{x=\mu\pm 2\sigma}^2 = 5\sigma^2 = (5/2)\nu_0^2; \ldots$$

$$\ldots\ \sigma_{x=\mu\pm a\sigma}^2 = (a^2+1)\sigma^2 = [(a^2+1)/2]\nu_0^2.$$

Для дисперсій наведених значень за правилом (22) знайдемо щільності нормального розподілу випадкової величини за наступним виразом (23)

$$\left.\begin{array}{l}
n(x=\mu;\nu_0) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\nu_0} e^{1/2-(1/2)\nu_0^2/\nu_0^2} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\nu_0}; \\
n(x=\mu\pm\sigma;\nu_0) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\nu_0} e^{1/2-\nu_0^2/\nu_0^2} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\nu_0} e^{-1/2}; \\
n(x=\mu\pm 2\sigma;\nu_0) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\nu_0} e^{1/2-(5/2)\nu_0^2/\nu_0^2} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\nu_0} \mathrm{e}^{-2}; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n(x=\mu\pm a\sigma;\nu_0) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\nu_0} e^{1/2-[(a^2+1)/2]\nu_0^2/\nu_0^2} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\nu_0} e^{-a^2/2}.
\end{array}\right\}$$

отже твердження доведено.

Приклад 2. В прикладі 1 генеральна сукупність має такі характеристики: $\mu = 1.61$ мм; $\sigma = 0{,}0975$ мм; $\nu_0^2 == 0{,}019$ мм^2. Потрібно за формулами (23) обчислити співвідношення щільності розподілу випадкової величини для її значень: $x=\mu$; $x=\mu\pm\sigma$; $x=\mu\pm 2\sigma$; $x=\mu\pm 3\sigma$.

Були обчислені такі значення щільності розподілу випадкової величини:

$$\begin{aligned} n(x=\mu;v_0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}v_0} = 4{,}09306 \text{ мм}^{-1}; \\ n(x=\mu\pm\sigma;v_0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}v_0}e^{-1/2} = 2{,} 48257 \text{ мм}^{-1}; \\ n(x=\mu\pm 2\sigma;v_0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}v_0}\mathrm{e}^{-2} = 0{,}55394 \text{ мм}^{-1}; \\ n(x=\mu\pm 3\sigma;v_0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}v_0}e^{-9/2} = 0{,}04547 \text{ мм}^{-1}. \end{aligned} \tag{24}$$

Якщо прийняти щільність розподілу значення $x=\mu$ за одиницю, то співвідношення наведених щільностей буде таке:

$$n(x=\mu):n(x=\mu\pm\sigma):n(x=\mu\pm 2\sigma):n(x=\mu\pm 3\sigma) = \\ = 1:e^{-\frac{1}{2}}:e^{-2}:e^{-\frac{9}{2}} = 1:0{,}606:0{,}135:0{,}011. \tag{25}$$

Дисперсії геодезичних вимірів

Новий підхід до оцінки точності започатковано в рекомендації ІНС 1 Міжнародного комітету мір та ваг, яка рекомендує складові невизначеностей категорії *А* оцінювати вибірковими дисперсіями s_i^2 або відхиленнями s_i [6].

Відомо, що генеральні сукупності вимірів оцінюються не вибірковими дисперсіями, дослідженням яких займається теорія ймовірностей, а генеральними дисперсіями σ^2.

Необхідно вирішити проблему оцінки точності геодезичних вимірювань при наявності генеральної сукупності вимірів.

Кількісною (числовою) мірою відхилення дискретної випадкової величини *X* від її математичного сподівання $E(X)=\mu$ прийнято центральний момент другого порядку, який позначається символом σ^2 (12)

В математичній статистиці, складовою частиною якої є теорія похибок вимірювань, величину σ^2 називають генеральною дисперсією, а величина $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$ є стандартним відхиленням величини *X*.

Математичне сподівання величини *X* визначається

$$\mu = E(X) = \textstyle\sum_x x\cdot f(x). \tag{26}$$

У теорії ймовірностей величину μ називають середнім значенням величини *X*, а в математичній статистиці – генеральним середнім значенням.

Дисперсію дискретної величини *X* обчислюють за теоремою, яка наведена в праці [5]:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2, \tag{27}$$

де

$$E(X^2) = \sum_x x^2 \cdot f(x) \tag{28}$$

є математичним сподіванням квадрата випадкової величини, *f*(*x*) – функція розподілу імовірностей [5].

Доведення (27) виконується на основі означень (12), (26), (28) і за другою аксіомою ймовірностей:

$$\sum_x f(x) = \sum_x p(x) = 1. \tag{29}$$

Другу аксіому ймовірностей формулюють ще так [2], що $P\{I\} = 1$ для достовірної події *I*.

Привівши цю аксіому і вказавши на те, що з рівності $P\{E(X)\}$ не випливає, що *E* являє собою достовірну подію, теорія ймовірностей ніколи не наводить жодного прикладу вірогідної події. Використавши сучасну методику, яка дозволяє практично до мінімуму скоротити вплив систематичних похибок, сучасним приладом (високоточний нівелір Н-05 і інварними нівелірними рейками), можна виміряти перевищення між двома реперами розташованими на відстані 100 метрів один від одного багатьма прийомами і обчислити генеральне середнє значення μ який би довірчий інтервал для цього значення не був би побудований, цей інтервал не буде вірогідним, оскільки його ймовірність не дорівнює одиниці.

Теорія ймовірностей не приділяє уваги розмаху *R* значень виміряних випадкових величин, бо розглядає випадкові величини, які набувають значень в межах від $-\infty$ до ∞. В теорії похибок вимірювань розмах значень вимірів *R* є вірогідною величиною, оскільки при збільшені кількості вимірів однієї величини він приблизно набуває постійного значення, яке залежить від точності вимірювального приладу.

Розглянемо функцію щільності розподілу величини *X* з середнім значенням μ і дисперсією σ^2 для нормального закону розподілу (23) [5]:

$$n(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{30}$$

де: π = 3.1415926… ; *e* = 2.71828… .

На цьому законі будується теорія ймовірностей, а в геодезичній практиці випадкові величини набувають найбільших значень $\pm 4\sigma \div \pm 5\sigma$ (і іноді $\pm 6\sigma$).

З означення (12) і теореми (27) витікає, що генеральна дисперсія σ^2 – це розсіювання величини *X* відносно її генерального середнього значення μ. Величина μ є такою числовою реалізацією значень генеральної сукупності вимірів, яка має генеральну дисперсію σ^2, яка є найменшою з усіх дисперсій, які визначаються на цій сукупності.

Наприклад, якщо взяти будь - яке значення x_i величини X, то воно має свою міру розсіювання – дисперсію $\sigma^2_{x_i}$.

Означення. Є генеральна сукупність вимірів, які мають значення x_i. Дисперсією $\sigma^2_{x_i}$ значення x_i дискретної величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення величини X від x_i, тобто

$$\sigma^2_{x_i} = E(X - x_i)^2 = \sum_x (x - x_i)^2 \cdot f(x), \tag{31}$$

де: $f(x)$ – функція розподілу ймовірностей [5].

Величина $\sigma_{x_i} = \sqrt{\sigma^2_{x_i}}$ називається стандартним відхиленням значення x_i величини X.

Приклад 3, у табл. наведено ряд розподілу значень генеральної сукупності вимірів обсягом n = 100 перевищень між двома реперами нівелірного ходу. Визначимо довірчий інтервал для значень дискретної величини, генеральне середнє значення μ перевищення, генеральну дисперсію σ^2, стандартне відхилення $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, а також дисперсії: $\sigma^2_{x(1)}, \sigma^2_{x(2)}, \ldots, \sigma^2_{x(7)}$ значень $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, …, $x_{(7)}$
перевищень і їхні стандартні відхилення $\sigma_{x(1)}, \sigma_{x(2)}, \ldots, \sigma_{x(7)}$.

Генеральна сукупність має обсяг вимірів k =100, а обсяг «значень» генеральної сукупності k_G = 7. Ступінь квантування [3] вимірів $[Q] = x_{i+1} - x_i$ = 0,1 мм, розмах вимірів $R = x_{max} - x_{min}$ = 1,9 – 1,3 = 0,6 мм (табл. 1).

Центр розмаху вимірів буде таким:

$$\bar{x}_G = \frac{x_{min} + x_{max}}{2} + \frac{x_{(1)} + x_{(7)}}{2} + \frac{1.3 + 1.9}{2} = 1.6 \text{ мм}$$

$$\sum_x f(x) = \sum_x p(x) = 0.01 + 0.03 + 0.18 + 0.49 + 0.23 + 0.04 + 0.01 = 1.$$

Враховуючи заокруглення значень вимірів, знайдемо допустимі граничні значення перевищення

$$\begin{cases} x_{доп(min)} = x_{(1)} - \frac{[Q]}{2} = 1.3 - \frac{0.1}{2} = 1.25 \text{ мм} \\ x_{доп(max)} = x_{(7)} + \frac{[Q]}{2} = 1.9 + \frac{0.1}{2} = 1.95 \text{ мм.} \end{cases}$$

Довірчий інтервал для значень величини X набуде вигляду (17):

$$P\left(x_{доп(min)} \le X \le x_{доп(max)}\right) = P(1.25 \le X \le 1.95) = 1.$$

За формулою (26) обчислимо генеральне середнє значення перевищення

$\mu = 1.3 \cdot 0.01 + 1.4 \cdot 0.03 + 1.5 \cdot 0.18 + 1.6 \cdot 0.49 + 1.7 \cdot 0.23 + 1.8 \cdot 0.04 + 1.9 \cdot 0.02 = 1.61$,

Визначимо відхилення ε центра розмаху $\bar{x}_G$ вимірів від генерального середнього значення μ

$$\varepsilon = |\bar{x}_G - \mu| = |1.6 - 1.61| = 0.01$$

Оскільки відхилення $\varepsilon < [Q]$ за величиною значно менше ступеня квантування $[Q]$ вимірів, то в першому наближенні можна вважати, що виміри нормально розподілені.

Генеральну дисперсію величини X обчислимо за теоремою (27), для цього за формулою (28) визначимо математичне сподівання квадрата випадкової величини

$E(X^2) = 1.3^2 \cdot 0.01 + 1.4^2 \cdot 0.03 + 1.5^2 \cdot 0.18 + 1.6^2 \cdot 0.49 + 1.7^2 \cdot 0.23 + 1.8^2 \cdot 0.04 + 1.9^2 \cdot 0.02 = 2.6016$ мм^2,

отже,

$$\sigma^2 = 2.6016 - 1.61^2 = 0.0095 \text{ мм}^2 \;\; \sigma = \sqrt{0.0095} = 0.0975 \text{ мм}.$$

За означенням (31) обчислимо розсіювання : $\sigma^2_{x(1)}, \sigma^2_{x(2)}, \dots, \sigma^2_{x(7)}$ значень $x_{(1)}$,

$x_{(2)}$, …, $x_{(7)}$ генеральної сукупності вимірів і їхні стандартні відхилення $\sigma_{x(1)}, \sigma_{x(2)}, \dots, \sigma_{x(7)}$,

одержимо

$\sigma^2_{x_1} = \sum_x (x - x_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 \cdot f(x_2) + (x_3 - x_1)^2 \cdot f(x_3) + (x_4 - x_1)^2 \cdot f(x_4) + (x_5 - x_1)^2 \cdot f(x_5) + (x_6 - x_1)^2 \cdot f(x_6) + (x_7 - x_1)^2 \cdot f(x_7) = (1.4 - 1.3)^2 \cdot 0.03 + (1.5 - 1.3)^2 \cdot 0.18 + (1.6 - 1.3)^2 \cdot 0.49 + (1.7 - 1.3)^2 \cdot 0.23 + (1.8 - 1.3)^2 \cdot 0.04 + (1.9 - 1.3)^2 \cdot 0.02 = 0.1056$ мм^2;

$\sigma^2_{x_2} = \sum_x (x - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2 \cdot f(x_1) + (x_3 - x_2)^2 \cdot f(x_3) + (x_4 - x_2)^2 \cdot f(x_4) + (x_5 - x_2)^2 \cdot f(x_5) + (x_6 - x_2)^2 \cdot f(x_6) + (x_7 - x_2)^2 \cdot f(x_7) = (1.3 - 1.4)^2 \cdot 0.01 + (1.5 - 1.4)^2 \cdot 0.18 + (1.6 - 1.4)^2 \cdot 0.49 + (1.7 - 1.4)^2 \cdot 0.23 + (1.8 - 1.4)^2 \cdot 0.04 + (1.9 - 1.4)^2 \cdot 0.02 = 0.0536$ мм^2.

Аналогічно одержимо $\sigma^2_{x_3} = (x \quad - x_3)^2 \cdot f(x \quad) = 0.0216$ мм^2;

$\sigma^2_{x_4} = (x - x_4)^2 \cdot f(x) = 0.0096$ мм^2; $\sigma^2_{x_5} = (x - x_5)^2 \cdot f(x) = 0.0176$ мм^2;

$\sigma^2_{x_6} = (x - x_5)^2 \cdot f(x) = 0.0456$ мм^2; $\sigma^2_{x_7} = (x - x_6)^2 \cdot f(x) = 0.0936$ мм^2.

Обчислення дисперсій $\sigma_{x_i}^2$ значень величини X значно спроститься, якщо застосувати загальне правило їх обчислення.

Теорема 1. Якщо μ – генеральне середнє значення, а σ^2 – генеральна дисперсія дискретної величини X, то дисперсія $\sigma_{x_i}^2$ значення x_i набуде вигляду:

$$\sigma_{x_i}^2 = \sigma^2 + (x_i - \mu)^2. \tag{32}$$

Доведення. За означенням (31)

$$\sigma_{x_i}^2 = \sum_x (x - x_i)^2 \cdot f(x) = \sum_x \left(x^2 - 2xx_i + x_i^2\right) f(x) =$$

$$= \sum_x x^2 f(x) - 2x_i \sum_x x f(x) + \sum_x x_i^2 f(x). \tag{33}$$

У цьому рівнянні $\sum_x x_i^2 f(x) = x_i^2 \sum_x f(x)$, враховуючи аксіому ймовірностей (29), одержимо: $\sum_x x_i^2 f(x) = x_i^2$, на основі означень (26), (28) в рівнянні (33):

$\sum_x x f(x) = \mu$, а $\sum_x x^2 f(x) = E(X^2)$, таким чином, рівняння (33) спрощується:

$$\sigma_{x_i}^2 = E(X^2) - 2x_i\mu + x_i^2 \tag{34}$$

З урахуванням теореми (13): $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$, використавши цю залежність, формулу (34) запишемо в такому вигляді:

$$\sigma_{x_i}^2 = \sigma^2 + \left(x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2\right) = \sigma^2 + (x_i - \mu)^2, \tag{35}$$

Таким чином теорему доведено.

З теореми випливають два наслідки.

Наслідок 1. Якщо генеральна сукупність вимірів має ступінь квантування $[Q]$, то дисперсія $\sigma_{(i)}^2$ значення x_i величини X буде мати вигляд:

$$\sigma_{x(i)}^2 = \sigma^2 + \left[\left(x_{(1)} + (i-1)[Q]\right) - \mu\right]^2, \tag{36}$$

де : $x_{(1)} = x_{\min}$ є першим упорядкованого за зростанням ряду «значень» сукупності вимірів; i – порядковий номер «значення» виміру у ряді вимірів.

Якщо є генеральна сукупність вимірів, то впорядкований за зростанням ряд «значень» вимірів має ступінь квантування $[Q]$, отже,

$$x_{(2)} = x_{(1)} + [Q];\ x_3 = 2[Q]; \ldots;$$

$$x_{(k_{(G-1)})} = x_{(1)} + (k_G - 2)[Q];\ x_{(k_{(G)})} = x_{(1)} + (k_G - 1)[Q],$$

в цьому ряді величина $(k_G - 1)[Q] = R$. З урахуванням наведених значень від правила (32) переходимо до правила (36), отже розсіювання вимірів залежить від їх розмаху *R* і ступеня квантування [*Q*].

Наслідок 2. Якщо є випадкова вибірка обсягу *к*, то вибіркова дисперсія $s_{x_i}^2$ значення x_i величини *X* буде мати вигляд:

$$s_{x_i}^2 = s^2 + (x_i - \bar{x})^2, \tag{37}$$

де: $s^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2$, що є вибірковою дисперсією [2] ; $\bar{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$ – це вибіркове середнє значення (арифметичне середнє) величини *X*.

Вибіркова дисперсія s^2 є оцінкою для генеральної дисперсії σ^2, а алгебраїчним відображенням середнього значення μ величини *X* і дисперсії $\sigma_{x_i}^2$ у випадковій вибірці відповідно будуть вибіркове середнє значення $\bar{x}$ і вибіркова дисперсія $s_{x_i}^2$, врахувавши наведені відповідності від правила (32) приходимо до правила (37).

Приклад 2. Візьмемо ряд розподілу з прикладу 1 з його характеристиками. Необхідно обчислити розсіювання значень вимірів за наведеною теоремою (32), правилом (36) і стандартні відхилення значень вимірів, отже маємо:

$$\sigma_{x_1}^2 = \sigma^2 + (x_1 - \mu)^2 = 0.0095 + (1.3 - 1.61)^2 = 0.1056 \text{ мм}^2,$$

$$\sigma_{x_2}^2 = \sigma^2 + (x_2 - \mu)^2 = 0.0095 + (1.4 - 1.61)^2 = 0.0536 \text{ мм}^2,$$

аналогічно знайдемо:

$$\sigma_{x_3}^2 = \sigma^2 + (x_3 - \mu)^2 = 0.0216 \text{ мм}^2;\ \sigma_{x_4}^2 = \sigma^2 + (x_4 - \mu)^2 = 0.0096 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_{x_5}^2 = \sigma^2 + (x_5 - \mu)^2 = 0.0176 \text{ мм}^2;\ \sigma_{x_6}^2 = \sigma^2 + (x_6 - \mu)^2 = 0.0456 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_{x_7}^2 = \sigma^2 + (x_4 - \mu)^2 = 0.0936 \text{ мм}^2.$$

Обчислимо дисперсії значень генеральної сукупності за правилом (36):

$$\sigma_{x_{(1)}}^2 = 0.0095 + [(1.3 + (1-1)(0.1) - 1.61)]^2 = 0.1056 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_{x_{(2)}}^2 = 0.0536 \text{ мм}^2;\ \sigma_{x_{(3)}}^2 = 0.0216 \text{ мм}^2;\ \sigma_{x_{(4)}}^2 = 0.0096 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_{x_{(5)}}^2 = 0.0176 \text{ мм}^2;\ \sigma_{x_{(6)}}^2 = 0.0456 \text{ мм}^2;\ \sigma_{x_{(7)}}^2 = 0.0936 \text{ мм}^2.$$

Отже, якщо дисперсії $\sigma_{x_i}^2$ значень величини *X* визначати за ознаками (31), за теоремою (32) або за правилом (36), то видно, що вони мають однакові значення.

Відхилення значень вимірів буде:

$$\sigma_{x_{(1)}} = 0.325 \text{ мм}; \ \sigma_{x_{(2)}} = 0.232 \text{ мм}; \ \sigma_{x_{(3)}} = 0.147 \text{ мм}; \ \sigma_{x_{(4)}} = 0.098 \text{ мм};$$

$$\sigma_{x_{(5)}} = 0.133 \text{ мм}; \ \sigma_{x_{(6)}} = 0.214 \text{ мм}; \ \sigma_{x_{(7)}} = 0.306 \text{ мм};$$

Контроль обчислення дисперсійних значень величини X зробимо за такою теоремою.

Теорема 2. Якщо генеральна сукупність вимірів має обсяг k, зачення величини X – обсяг k_G, генеральна дисперсія σ^2 і сума дисперсій $\sigma^2_{x_i}$ значень вимірів, дисперсії $\sigma^2_{x(i)}$ значень величини X мають такі залежності:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sigma^2_{x_i}}{2k} \qquad (i = 1, 2, \dots, k); \tag{38}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k_G} \sigma^2_{x(i)} f(x_i)}{2} \qquad (i = 1, 2, \dots, k_G), \tag{39}$$

де: $f\left(x_{(i)}\right)$ – ймовірності значення $x_{(i)}$ величини X.

З теореми 1 рівняння (18) випливає, що

$$\sigma^2_{x_1} = \sigma^2 + x_1^2 - 2x_1\mu + \mu^2;$$

$$\sigma^2_{x_2} = \sigma^2 + x_2^2 - 2x_2\mu + \mu^2;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sigma^2_{x_k} = \sigma^2 + x_k^2 - 2x_k\mu + \mu^2,$$

Додаємо ліві і праві частини цих рівнянь, одержимо

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k} \sigma^2_{x_i} = k\sigma^2 + \sum_{i=1}^{k} \sigma^2_{x_i} - 2\sum_{i=1}^{k} x_i\mu + k\mu^2,$$

розділимо ліву і праву частини цього рівняння на k, одержимо

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} \sigma^2_{x_i}}{k} = \sigma^2 + \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}{k} - 2\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k}\mu + \mu^2 =$$

$$= \sigma^2 + E(X^2) - 2E(X)\mu + \mu^2 = \sigma^2 + E(X^2) - \mu^2,$$

врахувавши теорему (13), одержимо $\frac{\sum_{i=1}^{k} \sigma^2_{x_i}}{k} = 2\sigma^2$, від цього рівняння приходимо до залежності (14).

Припустимо, що генеральна сукупність має значення $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, …, $x_{(k_G)}$, суми дисперсій вимірів, які мають однакові значення $\sigma^2_{x_{(1)}}, \sigma^2_{x_{(2)}}, \dots, \sigma^2_{x_{(k_G)}}$, будуть такими:

$$\sigma^2_{x_{(1)}} kf\left(x_{(1)}\right);\ \sigma^2_{x_{(1)}} kf\left(x_{(1)}\right);\ \dots,\ \sigma^2_{x_{(k_G)}} kf\left(x_{(k_G)}\right).$$

Отже, $k\sum_{i=1}^{k_G}\sigma^2_{x_{(i)}} f\left(x_{(i)}\right)$, буде сумою дисперсій значень генеральної

сукупності, врахувавши залежність (14), одержимо

$$\sigma^2 = \frac{k\sum_{i=1}^{k_G}\sigma^2_{x_{(i)}} f\left(x_{(i)}\right)}{2k} = \frac{\sum_{i=1}^{k_G}\sigma^2_{x_{(i)}} f\left(x_{(i)}\right)}{2},$$

відповідно теорему 2 доведено. З теореми випливають два наслідки.

Наслідок 1. Якщо є генеральна сукупність вимірів, то середня дисперсія ν_0^2 значень дискретної величини і її середнє стандартне відхилення ν_0 мають такий вигляд:

$$\nu_0^2 = 2\sigma^2; \tag{40}$$

$$\nu_0 = \sigma\sqrt{2}. \tag{41}$$

З рівнянь (38) і (39), одержимо:

$$2\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa}\sigma^2_{x_i}}{k} \qquad (i = 1,2,\dots,k\,); \tag{42}$$

$$2\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k_G}\sigma^2_{x(i)} f(x_i) \quad (i = 1,2,\dots,k_G). \tag{43}$$

Із рівнянь (42) і (43) випливає, що величина $2\sigma^2$ – це середня дисперсія значень величини *X*. Позначивши середнє відхилення величини *X* символом ν_0, із рівнянь (42) і (43) одержимо рівняння (40) і (41).

Наслідок 2. Якщо є випадкова вибірка, яка репрезентує генеральну сукупність вимірів, то середня вибіркова дисперсія ν^2 і середнє вибіркове відхилення ν величини *X* набудуть такого вигляду:

$$\nu^2 = 2s^2; \tag{44}$$

$$\nu = s\sqrt{2}. \tag{45}$$

Вибіркова дисперсія s^2 є прямим алгебраїчним відображенням генеральної дисперсії σ^2. Отже, від залежностей (40) і (41) приходимо до відповідностей (44) і (45).

Генеральну дисперсію σ^2 вважають характеристикою розсіювання величини *X*. По суті, величина *X* є квадратом середнього квадратичного відхилення значень цієї величини від її середнього значення μ. Середня дисперсія ν_0^2 – це числова реалізація сукупності дисперсій усіх значень величини *X*, тому середня дисперсія ν_0^2 є крашою оцінкою розсіювання величини *X* ніж генеральна дисперсія σ^2.

Приклад 3. За рядом розподілу значень генеральної сукупності вимірів перевищення, наведеного в табл. 1, необхідно виконати контроль обчислень, визначити середню дисперсію і середнє відхилення величини *X*, для цього знайдемо обсяги $m_1, m_2, \ldots, m_7$ вимірів, які мають значення $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(7)}$:

$$m_1 = kf(x_1) = 100 \cdot 0.01 = 1;\ m_2 = kf(x_2) = 100 \cdot 0.03 = 3;$$
$$m_3 = kf(x_3) = 100 \cdot 0.18 = 18;\ m_4 = kf(x_4) = 100 \cdot 0.49 = 49;$$
$$m_5 = kf(x_5) = 100 \cdot 0.23 = 23;\ m_6 = kf(x_6) = 100 \cdot 0.04 = 4;$$
$$m_7 = kf(x_7) = 100 \cdot 0.02 = 2;$$

Контроль: $\sum_{i=1}^{7} = 1 + 3 + 18 + 49 + 23 + 4 + 2 = 100$, Знайдемо суму розсіювань значень величини *X*

$$\sum_{i=1}^{7} \sigma_{x_i}^2 = m_1\sigma_{x_1}^2 + m_2\sigma_{x_2}^2 + \cdots + m_7\sigma_{x_7}^2 = 1.9\ \text{мм}^2.$$

Контроль обчислень дисперсії значень величини *X* виконаємо за формулами (38) і (39)

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sigma_{x_i}^2}{2k} = \frac{1.9}{2 \cdot 100} = 0.0095\ \text{мм}^2$$

$$\sum_{i=1}^{7} \sigma_{x_i}^2 = 0.1056 \cdot 0.01 + 0.0536 \cdot 0.03 + 0.0216 \cdot 0.18 + 0.0096 \cdot 0.49 +$$
$$+ 0.0176 \cdot 0.23 + 0.0456 \cdot 0.04 + 0.0936 \cdot 0.03 = 0.019\ \text{мм}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k_G} \sigma_{x(i)}^2 f(x_i)}{2} = \frac{0.019}{2} = 0.0095\ \text{мм}^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k_G).$$

З формулами (40) і (41) знайдемо середню дисперсію і середнє відхилення величини *X*:

$$\nu_0^2 = 2\sigma^2 = 2 \cdot 0.095 = 0.019\ \text{мм}^2;\ \ \nu_0 = 0.0975 \cdot \sqrt{2} = 0.138\ \text{мм}.$$

Підсумовуючи, можна сказати, що за одержаними формулами (32) і (36) можна швидко визначити дисперсії значень генеральних сукупностей вимірів і встановити ваги цих вимірів щодо замкнeності геодезичних побудов [7] , це дає можливість розподіляти нев'язкі безпосередньо в значення x_i вимірів і одержати точніші генеральні середні значення вимірів.

Одержані формули (40), (41), (42), (43) дають можливість знайти середні дисперсії і середні відхилення вимірів генеральних і вибіркових сукупностей вимірів.

Висновки. Властивості істинних похибок.

В замкненій зрівняній системі істинні похибки не накопичуються, а компенсуються.

1.Обгрунтовуються два твердження теорії похибок вимірювань (17) і (23).

2. Середня дисперсія v_0^2 – це загальна характеристика розсіювання випадкової величини. Вона є кращою оцінкою розсіювання величини X ніж генеральна дисперсія σ^2.

3. Відповідності (23) – це властивості кривої нормального розподілу.

Перспективи подальших розвідок в даному напрямку полягають в установленні законів розподілу [8], властивостей характеристик положення і розсіювання випадкових величин, які набувають значень в точковій множині интервалу (17).

Величини дисперсій геодезичних вимірів, а отже і точність вимірювань знаходяться в залежності від ступеня квантування $[Q]$ і розмаху R вимірів. Високоточні вимірювання, як правило, виконуються зі сталим ступенем квантування. Тому, для зменшення дисперсій вимірів, вимірювання необхідно проводити такими приладами, використання яких зменшує розмах R вимірів, наприклад, при кутових вимірюваннях і нівелюванні менші розмахи вимірів одержимо при застосуванні електронних тахеометрів, теодолітів і нівелірів, зорові труби яких мають більші діаметри вхідних отворів і збільшення 30^x.

Перспективи подальших досліджень у даному напрямку полягають в розробці нових методів зрівнювання вимірів елементів замкнених систем кіл ***К***, ***М*** геодезичних побудов [3], у визначені точності зрівняних елементів таких систем, у знаходженні найімовірніших значень дисперсій результатів додавання сукупностей вимірів та у встановлені законів розподілу [9] дискретних величин, що набувають значень у межах їх вірогідного розмаху R.

Список літератури

1. Білецький Я.В., Пряха Б.Г. Про дисперсії геодезичних вимірів // Інженерна геодезія, вип. 49, 2003, С. 36-46.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научних работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
3. Пряха Б.Г., Білецький Я.В. Про точність геодезичних вимірювань // Вісник геодезії та картографії. – 2003. – №3. – С. 43-49.
4. Сергеев А.Г., Крохин В.В. Метрология: Уч. пособ. – М.: Логос, 2001. – 408 с.
5. Walpole Ronald E, Myers Raymond H. Probability and Statistics for Engineers and Scientists. 3-th edition, Macmillan Publishing Company. – New York, 1985. – 639 p.
6. Войтенко С.П., Лапицький І.В. До питання сучасного підходу оцінки точності геодезичних вимірювань //Інженерна геодезія. – Вип. 48. – 2002. – С. 55-57.
7. Пряха Б.Г. До оцінки похибок вимірювань у геодезичних побудовах //Вісник геодезії та картографії. – 2002. - №4. – С. 11-18.
8. Gladilin V., Belenok V., Hebrin – Baidy L., Chookarina N. Structural method for determining deformations by geodetic measurement. Geodesy and Cartography. Vol. 45, No 2, 2019. – P92 -95. Doi.org/10.3846/gac2019.6692

9. Гладілін В.М., Сіроштан Т.М., Шудра Н.С., Чуланов П.О. Визначення форми розподілу помилок геодезичних вимірювань. Містобудування та територіальне планування. К.: КНУБА, 2022.-Вип. 80.– С. 130-145. Doi.org/10.32347/2076—815x.2022.80.

10. Gladilin V., Sirosytan T., Sviderska T., Shudra N. Assessment of geodetic measurement errors. Prospective and Priority Directions of Scientific Research in Technical and Agricultural Sciences. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data ISBN – 979-8-88757-694-8 DOI – 10.46299/ISG.2023.MONO.TECH.3.1.1 P. 8-37, Boston USA (2022)

11. Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру. М.: Наука, 1973. - 326 с.

Ph. D., **Gladilin Valeriy,** Dr. Tech. Sciences **Maznitskij Anatolij,**
Ph. D., **Siroshtan Tatiana, Sviderska Tetyana,** Ph. D. **Gamalij Irina**
Bilotserkov National Agrarian University,
Shudra Natalia, Chulanov Petro
Kyiv National University of Construction and Architecture

PROPERTIES OF TRUE ERRORS OF GEODESIC MEASUREMENTS IN THE ALGEBRAIC CIRCLE

True errors can be found when we know the true value of the measured value. In geodetic measurements and in any other measurements, the true value of the measured quantity is unknown, therefore the most probable value of this quantity is taken, the sum of probable errors must be zero, the sum of true errors must be zero, therefore it is necessary to investigate the probable and true errors in an algebraic circle .

A new method of equalizing and assessing the accuracy of measurements is considered. It differs from traditional methods in that, as a result of processing the measurements of one quantity, not only the total mean squared error is obtained, but also the mean squared errors of all measurements.

The nature of true errors is manifested in closed systems, each (any) element of a closed system is neutral and opposite to all other elements and can be the beginning and end of the system. Therefore, a simple, closed system can be considered as an algebraic circle of elements, the dimensions of which are not measured precisely, but with some error.

Definition 1. The set of all elements of a closed system is called a circle ***K***, if the algebraic sum of the values of these elements is a true physical quantity.

Definition 2. The set of all elements of a closed system is called a circle ***M*** if the algebraic sum of the values of these elements is zero.

In circle ***K*** and circle ***M***, we consider their own subsets, arcs D and $\overline{D}$ which are opposite to each other and such that

$$D \subset K, \overline{D} = K \setminus D; \; D \subset M, \overline{D} = M \setminus D.$$

Theorem. If the elements of the system create a circle ***K*** or a circle ***M***, then the algebraic sum of their true errors is zero, and the algebraic sums of the errors of any two opposite arcs *D* and $\bar{D}$, circle ***K*** or circle ***M***, will be the same in magnitude and have opposite signs.

If three angles and three side lengths are measured in a triangle, then such a triangle has the properties of a closed circle ***M***.

REFERENCES

1. Biletskyi Ya.V., Priakha B.H. Pro dyspersii heodezychnykh vymiriv // Inzhenerna heodeziia, vyp. 49, 2003, S. 36-46. {in Ukrainian}

2. Korn H., Korn T. Spravochnyk po matematyke dlia nauchnykh rabotnykov y ynzhenerov. – M.: Nauka, 1968. – 720 s. {in Russian}

3. Priakha B.H., Biletskyi Ya.V. Pro tochnist heodezychnykh vymiriuvan // Visnyk heodezii ta kartohrafii. – 2003. – №3. – S. 43-49. {in Ukrainian}

4. Cerheev A.H., Krokhyn V.V. Metrolohyia: Uch. posob. dlia vuzov. – M.: Lohos, 2001. – 408 s. {in Russian}

5. Walpole Ronald E, Myers Raymond H. Probability and Statistics for Engineers and Scientists. 3-th edition, Macmillan Publishing Company. – New York, 1985. – 639 r. {in English}

6. Voitenko S.P., Lapytskyi I.V. Do pytannia suchasnoho pidkhodu otsinky tochnosti heodezychnykh vymiriuvan // Inzhenerna heodeziia. – Vyp. 48. – 2002. – S. 55-57. {in Ukrainian}

7. Priakha B.H. Do otsinky pokhybok vymiriuvan u heodezychnykh pobudovakh //Visnyk heodezii ta kartohrafii. – 2002. - №4. – S. 11-18. {in Ukrainian}

8. Gladilin V., Belenok V., Hebrin – Baidy L., Chookarina N. Structural method for determining deformations by geodetic measurement. Geodesy and Cartography. Vol. 45, No 2, 2019. – P. 92-95. Doi.org/10.3846/gac2019.6692. {in English}

9. Gladilin V.M., Ciroshtan T.M., Shudra N.S., Chulanov P.O. Vyznachennia formy rozpodilu pomylok heodezychnykh vymiriuvan. Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia. K.: KNUBA, 2022. - Vyp. 80. – S. 130-145. Doi.org/10.32347/2076—815x.2022.80. {in Ukrainian}

10. Gladilin V., Sirosytan T., Sviderska T., Shudra N. Assessment of geodetic measurement errors. Prospective and Priority Directions of Scientific Research in Technical and Agricultural Sciences. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data ISBN – 979-8-88757-694-8 DOI – 10.46299/ISG.2023.MONO.TECH.3.1.1 P. 8-37, Boston USA (2022). {in English}