

DOI: 10.32347/2786-7269.2023.5.223-239

УДК 534.014.3

к.т.н., доцент **Човнюк Ю. В.**,

ychovnyuk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-0608-0203,

к.т.н., доцент **Кравчук В.Т.**, vtk1@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5213-3644,доцент **Чередніченко П.П.**, petro\_che@ukr.net, ORCID: 0000-0001-7161-661X,к.т.н., доцент **Остапущенко О.П.**,

olga\_ost\_17@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8114-349X,

Київський національний університет будівництва

## ПОТУЖНОСТІ ПРИ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАННЯХ ПРИВОДІВ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ, ТРАНСПОРТУЮЧИХ І ВІБРОФОРМУЮЧИХ БЕТОННІ СУМІШІ МАШИН ТА МЕХАНІЗМІВ

*Мета дослідження полягає у деталізації видів механічної потужності при гармонічних коливаннях, які виникають у приводах вантажопідйомних, транспортуючих і віброформуєчих бетонні суміші машин та механізмів. У зв'язку з незворотністю теплової енергії її похідна приймає лише додатні значення. Разом з тим похідні можна взяти як від потенціальної, так і від кінетичної енергії. Однак найбільш цікавим є випадок гармонічних коливань приводів вказаних машин та механізмів, за яких похідні (миттєві потужності) необхідно представляють собою знакозмінні функції, що принципово відрізняє їх від теплової потужності. Аналогом кінетичної енергії в електротехніці є енергія магнітного поля котушки індуктивності, аналогом потенціальної енергії – енергія електричного поля конденсатора, а механічну теплову енергію замінює теплова ж енергія, яка розсіюється резистором. У роботі показано, що при механічних коливаннях приводів вантажопідйомних, транспортуючих та віброформуєчих бетонні суміші машин та механізмів розвивається не тільки теплова потужність (додатнього знаку), але й знакозмінні реактивні потужності, котрі характеризують зворотність кінетичної та потенціальної енергій. Тут під активною потужністю розуміють середнє за півперіоду значення миттєвої потужності, а під реактивною – амплітудне значення. Повна механічна потужність приводів машин та механізмів, з однієї сторони, описується формулою Піфагора, а з іншої – дорівнює добутку діючих значень гармонічних величин. Особливістю комплексного представлення є те, що при обчисленні повної потужності один з векторів, які перемножуються, повинен бути спряженим. Представлення про механічні реактивну, активну та повну потужності – це узагальнення відповідних понять з електротехніки, що є проявом електромеханічного дуалізму. Оскільки у більшості машин та механізмів приводи переважно електромеханічні, механічна реактивна*

*потужність трансформується у електричну реактивну потужність мережі, погіршуючи тим самим якість електроенергії. У зв'язку з цим врахування механічної реактивної потужності має доволі велике значення.*

*Ключові слова: механічна потужність; кінетична енергія; потенціальна енергія; комплексне представлення; векторне представлення; резонанси; приводи; вантажопідйомні; транспортуючі; віброформуєчі машини; трансформація механічної потужності.*

**Постановка проблеми.** Механічна енергія (у т.ч. приводів машин та механізмів різного класу) буває зворотньою – потенціальна та кінетична а також незворотньою, наприклад, теплова за різних видів тертя. У якості механічної потужності прийнято вважати часову похідну від останньої. У зв'язку з незворотністю теплової енергії її похідна приймає тільки додатні значення.

Разом з тим, похідні можуть бути взяті як від потенціальної, так і від кінетичної енергії. Найбільш цікавим є випадок гармонічних коливань [1-4], за яких похідні (миттєві потужності) є знакозмінними функціями, що принципово відрізняє їх від теплової потужності.

Аналогом кінетичної енергії у електротехніці є енергія магнітного поля котушки індуктивності, аналогом потенціальної енергії – енергія електричного поля конденсатора, а аналогом механічної теплової енергії – теж теплова енергія, яка розсіюється опором (резистором).

Отже, необхідно деталізувати види механічної потужності при гармонічних коливаннях приводів вантажопідйомних, транспортуючих та віброформуєчих бетонні суміші машин і механізмів.

Актуальність даного дослідження обумовлена тим, що механічні коливання широко розповсюджені у різноманітних технологічних процесах [5-10]. Оскільки приводи вказаних вище машин та механізмів є переважно електромеханічними, механічна реактивна потужність трансформується у електричну реактивну потужність мережі [11-13], погіршуючі якість електроенергії [14-17]. У зв'язку з цим врахування механічної реактивної потужності має важливе значення.

**Аналіз публікацій по темі дослідження.** Питанням стабілізації амплітуди коливань механічних систем, синтезу законів управління режимами роботи (автоматизованих) вібраційних установок (у т.ч. мехатронного типу) присвячені роботи [1-8]. Прикладний системний аналіз та структурне математичне моделювання динаміки транспортуючих, вантажопідйомних та технологічних машин різних видів проведені у роботах [9, 10]. Автори [14-17] досліджують питання компенсації реактивної потужності у електричних мережах.

Символічний (комплексний) метод для розрахунку складних механічних систем при гармонічних впливах, математичні моделі резонансних/антирезонансних процесів, інертні реактанси вібраційних машин, “ортогональні” потужності при механічних коливаннях вивчені у [18-23]. Проте всебічний аналіз трансформації механічної потужності при гармонічних коливаннях приводів вантажопідйомних, транспортуючих та віброформуєчих бетонні суміші машин і механізмів, на думку авторів даного дослідження, не проведений. Саме цьому і присвячена дана робота.

**Мета роботи** полягає у деталізації видів механічної потужності при гармонічних коливаннях приводів вантажопідйомних, транспортуючих та віброформуєчих бетонні суміші машин і механізмів, обґрунтуванні моделі процесів трансформації механічної потужності у вказаних машинах/механізмах задля виявлення у них резонансних режимів поглинання енергії оброблюваним середовищем (бетонною сумішшю) і оптимізації режимів експлуатації таких технологічних машин в умовах високої (економічної) ефективності та заощадження енергетичних ресурсів.

#### **Виклад основного змісту дослідження.**

Метод електромеханічних аналогій вперше був введений і обґрунтований у науковій літературі у 1873 році Дж.К.Максвеллом [24]:

- $v$  (швидкість)  $\rightarrow I$  (струм);
- $F$  (сила)  $\rightarrow U$  (напруга);
- $m$  (маса)  $\rightarrow L$  (індуктивність);
- $k$  (коефіцієнт пружності)  $\rightarrow 1/C$  ( $C$  – ємність);
- $r$  (коефіцієнт в'язкого опору)  $\rightarrow R$  (опір).

В 1919 р. Вебстер ввів у механіку запозичене з електротехніки поняття про механічні реактанси, які є аналогами електричних реактивних опорів [24]:

- $\omega m$  (інертний реактанс)  $\rightarrow \omega L$  (індуктивний опір);
- $k/\omega$  (пружний реактанс)  $\rightarrow 1/(\omega C)$  (ємнісний опір);

тут  $\omega$  – кругова частота коливань, а  $m$  – маса.

У відповідності з поданою системою аналогій формула закону Ома для ділянки електричного кола  $U = IZ$ , де  $Z = \sqrt{[\omega L - 1/(\omega C)]^2 + R^2}$  – повний опір, має дуально механічний вираз:  $F = V\bar{Z}$ , де  $V$  – швидкість,  $\bar{Z}$  – повний механічний опір або механічний імпеданс (impedance) –  $\bar{Z} = \sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2}$  (кг·с<sup>-1</sup>), як у зв'язку з дуальною відповідністю, так і тому, що у його склад входять інертний та пружний реактанси.

Механічний реактанс (reactance):  $x = m\omega - k/\omega$ .

При  $x = 0$  утворюється відома формула  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

Має місце резонанс сил, якщо при цьому  $r = 0$ , тоді й  $\bar{Z} = 0$ . Фізичний зміст цього полягає у тому, що система не справляє опору зовнішньому силовому гармонічному впливу [18].

У основі подальшого розгляду лежить електромеханічний дуалізм або ізоморфність у математичному сенсі електричних та механічних явищ і процесів.

Миттєва механічна потужність дорівнює похідній по часу від кінетичної енергії інертного тіла, а обчислюється як:

$$q_m = \frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = mv \cdot \frac{dv}{dt} = mav = f_a v,$$

де  $a$  – прискорення,  $f_a = ma$  – сила.

Інакше кажучи, миттєва механічна потужність дорівнює добутку миттєвих значень сили ( $f_a$ ) та швидкості ( $v$ ), що й буде використано у подальшому дослідженні.

Потужність, яка розвивається при вимушених гармонічних коливаннях інертного тіла.

Рух тіла (бетонної суміші як системи із зосередженими параметрами – дискретної системи) описується відомим виразом:  $x = l \sin \omega t$ . Відповідно, миттєва швидкість визначається як  $v = \dot{x} = \omega l \cos \omega t = v_m \cos \omega t$ ,  $v_m = \omega l$ .

В електротехніці встановлено, що для гармонічної величини діюче значення менше амплітудного в  $\sqrt{2}$ :

$$V = \frac{v_m}{\sqrt{2}} = \frac{\omega l}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

У відповідності з основною аксіомою механіки, відомою як другий закон Ньютона, формула для сили має вид:

$$f_a = m\ddot{x} = -m\omega^2 l \sin \omega t. \quad (2)$$

Формула для сили тертя, яка пропорційна швидкості, має вигляд:

$$f_\mu = \mu \dot{x} = \mu \omega l \cos \omega t. \quad (3)$$

Результуюча сила дорівнює сумі сил у відповідності з формулами (2) та (3):

$$f = f_a + f_\mu = -m\omega^2 l \sin \omega t + \mu \omega l \cos \omega t = \omega l \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2} \times \left( \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}} \cdot \cos \omega t - \frac{m\omega}{\sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}} \cdot \sin \omega t \right).$$

Для зручності подальших перетворень можна позначити:  $\varphi = \arctg(m\omega/\mu)$ .

Із урахуванням цього виразу для результуючої сили матимемо:

$$f = \left\{ \omega l \sqrt{\mu^2 + \omega^2 m^2} \right\} \cdot (\cos \varphi \cdot \cos \omega t - \sin \varphi \cdot \sin \omega t) = \\ = \omega l \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2} \cdot \cos(\varphi + \omega t).$$

Зрозуміло, що амплітуда миттєвого значення сили знаходиться як  $F_m = \omega l \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}$ .

Діюче значення результуючої сили за аналогією з виразом для швидкості (1) дорівнює:

$$F = \frac{F_m}{\sqrt{2}} = \frac{\omega l \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Миттєва результуюча потужність при вимушених гармонічних коливаннях інертного тіла буде мати насамперед вид:

$$S = fv = \omega l \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot \omega l \cdot \cos \omega t = \\ = \frac{1}{2} \omega^2 l^2 \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2} \cdot \{ \cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi \} = FV \{ \cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi \} = \quad (5) \\ = FV \{ \cos \varphi + \cos 2\omega t \cdot \cos \varphi - \sin 2\omega t \cdot \sin \varphi \} = \\ = FV \cos \varphi (1 + \cos 2\omega t) - FV \sin \varphi \sin 2\omega t = p + q_i.$$

В електротехніці існує вираз для миттєвої електричної потужності, аналогічний (5) із замінами:  $F \rightarrow U$ ,  $V \rightarrow I$ . У відповідності з ним визначають активну електричну потужність:  $P = UI \cos \varphi$ , тому активну (теплову) механічну потужність теж слід визначати як

$$p = FV \cos \varphi. \quad (6)$$

Зрозуміло, що гармонічні сила та швидкість здійснюють коливання із зсувом фаз, який складає  $\varphi$ . В електроенергетиці величина  $\cos \varphi$  грає ключову роль для визначення якості електроенергії.

З наведеної формули визначають реактивну електричну потужність:  $Q = UI \sin \varphi$ . Тому реактивну (інерційну) механічну потужність теж слід визначати як

$$q_i = FV \sin \varphi. \quad (7)$$

З формули (5) випливає, що під активною потужністю розуміють середнє за півперіоду значення миттєвої потужності, а під реактивною – амплітудне значення. В електротехніці саме так відбувається (аналогічним чином).

Іншим узагальненням з електротехніки є повна механічна потужність:

$$S = FV = \sqrt{q_i^2 + p^2}. \quad (8)$$

Вона цікава тим, що, з однієї сторони, описується формулою Піфагора, а з іншої – дорівнює добутку діючих значень гармонічних величин.

Маючи на увазі (1), (5) та (8):

$$q_i = FV \sin \varphi = \frac{\omega l \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega l}{\sqrt{2}} \cdot \frac{m \omega}{\sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}} = \frac{ml^2 \omega^3}{2}. \quad (9)$$

При цьому:  $f_a v = -ml \omega^2 \cdot \sin \omega t \cdot \omega l \cdot \cos \omega t = -0,5 ml^2 \omega^3 \cdot \sin 2\omega t = -F_a V \sin 2\omega t = -Q_i \sin 2\omega t$ .

Це відповідає виразам (5) та (9).

Маючи на увазі (1), (4) та (6):

$$p = FV \cos \varphi = \frac{\omega l \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega l}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}} = \frac{\mu l^2 \omega^2}{2}. \quad (10)$$

При цьому:  $f_\mu v = \mu \omega l \cdot \cos \omega t \cdot \omega l \cdot \cos \omega t = 0,5 \mu \omega^2 l^2 \cdot (1 + \cos 2\omega t) = F_\mu V (1 + \cos 2\omega t) = p(1 + \cos 2\omega t)$ .

Це відповідає виразам (5) та (10).

Враховуючи (8),(9) та (10):

$$S = FV = \frac{\omega l \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega l}{\sqrt{2}} = \frac{\omega^2 l^2 \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}}{2}.$$

Потужність, яка розвивається при пружних деформаціях.

Вираз для сили має вид :  $f_k = kx = kl \sin \omega t$ . Враховуючи (3), результуюча механічна сила буде обчислюватись як  $f = f_k + f_u = kl \sin \omega t + \mu \omega l \cos \omega t =$

$$= l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2} \cdot \left\{ \frac{k}{\sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}} \cdot \sin \omega t + \frac{\mu \omega}{\sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}} \cdot \cos \omega t \right\}.$$

Для зручності подальших перетворень можна позначити  $\varphi = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{k}{\mu \omega} \right\}$ .

Із урахуванням цього вираз для результуючої сили приймає наступний вигляд:

$$f = l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2} \cdot \{ \sin \varphi \cdot \sin \omega t + \cos \varphi \cdot \cos \omega t \} = l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2} \cdot \cos(\omega t - \varphi).$$

Зрозуміло, що амплітуда миттєвого значення сили має вид:

$$F_m = l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}.$$

Діюче значення результуючої сили по аналогії з виразом для швидкості (1) дорівнює:

$$F = \frac{F_m}{\sqrt{2}} = \frac{l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}}{\sqrt{2}}. \quad (11)$$

Миттєва результуюча потужність при вимушеній гармонічній деформації пружного тіла визначається як:

$$\begin{aligned}
S &= fv = l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2} \cdot \cos(\omega t - \varphi) \cdot \omega l \cos \omega t = \\
&= 0,5\omega l^2 \cdot \sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2} \cdot \{\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi\} = \\
&FV \cdot \{\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi\} = \\
&= FV \cdot \{\cos \varphi + \cos 2\omega t \cdot \cos \varphi + \sin 2\omega t \cdot \sin \varphi\} = \\
&= FV \cos \varphi \cdot (1 + \cos 2\omega t) + FV \sin \varphi \cdot \sin 2\omega t = p + q_d.
\end{aligned} \tag{12}$$

Враховуючи (5), (6) та (10), активна механічна потужність при цьому знаходиться як:

$$P = FV \cos \varphi = \frac{l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega l}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu\omega}{\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}} = \frac{\mu\omega^2 l^2}{2}.$$

Враховуючи (1), (7), (11) й (12), механічна реактивна (пружна) потужність буде мати наступний вид:

$$Q_d = FV \sin \varphi = \frac{l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega l}{\sqrt{2}} \cdot \frac{k}{\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}} = \frac{k\omega l^2}{2}. \tag{13}$$

При цьому:  $f_k v = kl \sin \omega t \cdot \omega l \cos \omega t = 0,5kl^2\omega \sin 2\omega t = F_k V \sin 2\omega t = Q_d \sin 2\omega t$ .

Це відповідає виразам (12) та (13).

Зрозуміло, що повна потужність дорівнює:

$$S = FV = \sqrt{Q_d^2 + P^2} = \frac{l^2\omega\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}}{2}.$$

Потужність при коливаннях, які пов'язані з гравітаційним впливом.

При відхиленні на кут  $\alpha$  вантажу, який підвішений на канаті довжиною  $L$ , виникає момент:  $M = mgL\alpha$ . Нехай  $\alpha = \alpha_0 \sin \omega t$ . Тоді:

$$\dot{\alpha} = \alpha_0 \omega \cos \omega t = \alpha_0 \sqrt{\frac{g}{L}} \cos \omega t.$$

Миттєва потужність має вид:

$$q_g = M\dot{\alpha} = mgL \cdot \alpha_0 \sin \omega t \cdot \alpha_0 \sqrt{\frac{g}{L}} \cos \omega t = 0,5m\alpha_0^2 \sqrt{g^3 L} \sin 2\omega t.$$

Її амплітуда і, відповідно, реактивна потужність гравітаційного впливу визначається як:

$$Q_g = 0,5m\alpha_0^2 \sqrt{g^3 L}.$$

З'ясуємо умови і закон зміни у часі  $\alpha(t)$ , за яких у період пуску кранової системи, що триває протягом проміжку часу  $t \in [0; \tau_n]$ , де  $\tau_n$  – тривалість пуску вказаної системи, миттєва потужність коливань вантажу на канаті, обумовлена гравітаційним впливом, є мінімальною, тобто виконується наступний критерій якості такого руху:

$$\tilde{I} = \left[ \frac{1}{\tau_n} \int_0^{\tau_n} \{M\dot{\alpha}\}^2 dt \right]^{1/2} \Rightarrow \min.$$

Доволі легко встановити, що необхідною умовою реалізації критерію  $\tilde{I} \Rightarrow \min$  є рівняння Ейлера-Пуассона виду:

$$\dot{\alpha}^2 + \alpha \cdot \ddot{\alpha} = 0.$$

Розв'язок останнього рівняння має вид:

$$\alpha(t) = At^{1/2} + C.$$

В період пуску кранової системи  $\alpha(0) = 0$ , тому  $C = 0$ .

Для визначення коефіцієнта  $A$  слід використати умови безпечної експлуатації (нормативні вимоги), котрі слід забезпечити, а саме:  $\alpha(t)|_{t=\tau_n} = \alpha_{\text{норм.}}$ . Тоді для коефіцієнту  $A$  отримаємо:

$$A = \frac{\alpha_{\text{норм.}}}{(\tau_n)^{1/2}}.$$

Загалом, закон  $\alpha(t)$  для виконання критерію  $\tilde{I} \rightarrow \min$  набуває наступного вигляду:

$$\alpha(t) = \alpha_{\text{норм.}} \cdot \left( \frac{t}{\tau_n} \right)^{1/2} /$$

Реактивна, активна та повна потужності у комплексному представленні.

По аналогії з електротехнікою гармонічну величину можна подати у вигляді:

$$a = A \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im} \{ A e^{i(\omega t + \varphi)} \}, \text{ де } A e^{i(\omega t + \varphi)} \text{ – вектор, котрий обертається з}$$

круговою частотою  $\omega$  у комплексній площині,  $i^2 = -1$ .

Вектори у комплексній площині зазвичай прийнято зображати для нульового моменту часу  $t$ . При цьому величина  $A e^{i(\omega t + \varphi)} = A e^{i\varphi} = \dot{A}$  зветься комплексною амплітудою [18],  $\varphi$  – початкова фаза коливань. У [19] показано, що за інертного навантаження:

$$\dot{V}_m = V_m \exp(i \cdot \pi/2).$$

Миттєва швидкість при цьому дорівнює:

$$v = V_m \cos \omega t = \text{Im} \dot{V}_m.$$

Формули для діючих значень величин принципово не відрізняються:

$$\dot{V} = V \exp(i \cdot \pi/2), \quad \dot{F} = F \exp\left(i \cdot \left[ \frac{\pi}{2} + \varphi \right]\right).$$

Особливістю комплексного представлення, яке детально описане в електротехніці, є те, що при обчисленні повної потужності один з векторів, які перемножуються, повинен бути спряженим.



$$S = \dot{F}\dot{V} = F \exp\left\{i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right\} \cdot V \exp\{-i \cdot \pi/2\} = FV \exp\{i\varphi\} = \\ = FV \cos\varphi + iFV \sin\varphi = P + iQ_i.$$

Це вираз для інертного навантаження. Відмінністю пружного навантаження є те, що реактивна потужність має протилежний знак:

$$S = \dot{F}\dot{V} = F \exp\left\{i \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right\} \cdot V \exp\{-i \cdot \pi/2\} = FV \exp\{-i\varphi\} = \\ = FV \cos\varphi - iFV \sin\varphi = P + iQ_d.$$

При цьому:  $P = \operatorname{Re}\{\dot{F}\dot{V}\}$ ;  $Q = \operatorname{Im}\{\dot{F}\dot{V}\}$ ;  $Q_i = -Q_d$ .

### Механічні реактанси.

Нехай до масивного виконавчого органу машини (вантажопідйомного, транспортуючого чи віброформуючого (бетонну суміш) типу) або відповідного механізму прикладена сила:

$$f = F_m \cos \omega t. \quad (14)$$

У відповідності з основною аксіомою механіки:

$$F_m \cos \omega t = m \frac{dv}{dt}; \int_0^v dv = \frac{F_m}{m} \cdot \int_0^t \cos \omega t dt, \quad v = \frac{F_m}{m\omega} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Звідси випливає, що амплітуда має вид:

$$V_m = \frac{F_m}{\omega m} = \frac{F_m}{X_m}, \text{ де } X_m - \text{інертний реактанс, } [X_m] = \text{кг} \cdot \text{рад}/\text{с}.$$

Отриманий вираз можна подати у комплексному виді [20]:

$$\dot{V} = -i \cdot \frac{F_m}{\omega m} = \frac{F_m}{i\omega m} = \frac{F_m}{X_m}. \quad (15)$$

Знак “—” обумовлений тим, що фаза миттєвої швидкості відстає від фази сили на  $\pi/2$ . Комплексні величини, які відповідають синусоїді, позначаються зазвичай точкою зверху, інші підкреслюються знизу.

У відповідності до (15) інертний реактанс має вид:

$$X_m = i\omega m.$$

Він характеризує властивість масивного тіла справляти/чинити опір приводу, який спонукається здійснювати коливання. Цілком закономірним є те, що він визначається масою та (круговою) частотою.

Відповідно до виразу (14) вектор сили орієнтований вдовж дійсної осі комплексної площини, тому згідно з формулою (15) вектор швидкості орієнтований вдовж уявної осі (тобто швидкість – чисто уявна). Миттєве значення реактивної (інерційної) потужності:  $q_i = fv$ .

Ця величина є уявною, оскільки є добутком уявної величини  $v$  на дійсну величину  $f$ .

Реактивна (інерційна) потужність у комплексному виді:

$$\dot{Q} = \dot{F}\dot{V}. \quad (16)$$

Реактивна (інерційна) потужність:

$$Q_i = \frac{F^2}{X_m} = V^2 X_m.$$

Сила тертя визначається формулою  $f = \mu v$ , звідси швидкість обчислюється як  $v = f/\mu$ .

Оскільки вектор сили орієнтований вповдовж дійсної осі комплексної площини (14) й  $\mu$  – дійсна величина, тоді величина є також дійсною.

Миттєве значення активної (теплової) потужності:

$$p = f\dot{v}.$$

Активна потужність теж дійсна величина, оскільки є добутком дійсних величин.

Активна потужність у комплексному виді.

Відповідно до (15) та (16) реактивна (інертна) потужність представляє собою чисто уявну величину:

$$\dot{Q}_i = \dot{F}\dot{V} = -i \cdot \frac{(\dot{F})^2}{\omega m}.$$

Активна (теплова) потужність за будь-якого характеру руху, наприклад, та, яка розвивається силою тертя ковзання, є дійсною величиною. У цьому зв'язку реактивна та активна потужності є умовно “ортогональними”. Отже, відповідно повна механічна потужність визначається виразом (8).

Неважко показати, що формула пружного реактансу має вид:

$$\underline{X}_k = -i \cdot \frac{k}{\omega}.$$

Реактивна (пружно-деформаційна) потужність визначається виразом:

$$Q_d = \frac{F}{\underline{X}_k} = V^2 \underline{X}_k.$$

Ця потужність обумовлена здатністю пружного тіла запасати й повертати потенціальну енергію пружної деформації. Реактивна (пружно-деформаційна) потужність є чисто уявною величиною. Її знак протилежний знаку реактивної (інерційної) потужності [20,21].

Повна потужність також обчислюється за формулою (8).

У механічній системі, яка складається з пружини і вантажу, сума реактансів буде обчислюватись наступним чином:

$$\underline{X} = \underline{X}_m + \underline{X}_k = i\omega_0 m - i \cdot \frac{k}{\omega_0}.$$

Якщо вона дорівнює нулю, виникає резонанс:

$$i\omega_0 m - i \cdot \frac{k}{\omega_0} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Активна та реактивна механічні потужності є умовно “ортогональними”, тому вони не складаються у звичайну суму. Для повної потужності справедливим є аналог теореми Піфагора (точно так, як у електротехніці). Інертний та пружний реактанси характеризують властивості масивного та пружного тіл (модель бетонної суміші) справляти супротив приводу, який спонукає ці тіла здійснювати коливання [21].

Останні дві формули демонструють переваги використання поняття про механічні реактанси та їх комплексне представлення.

У традиційному представленні для отримання формули власної частоти коливань маятника необхідно було розв’язати диференціальне рівняння другого порядку, тоді як у комплексному виді розв’язок вкладається у один рядок.

#### Механічні потужності у векторному представленні.

В основі комплексного представлення лежить ідея векторів, які обертаються у комплексній площині: той самий принцип може бути реалізований у тривимірному декартовому базисі.

З (6) та (7), (8) необхідно випливає наступне:

$$P = (F, V), \quad Q = \|F, V\|, \quad S^2 = (F, V)^2 + \|F, V\|^2.$$

Математична абстракція з проєкціями векторів, які обертаються, має конкретну матеріальну основу у вигляді кривошипно-кулісних механізмів.

Можливість одночасного опису гармонічних величин за допомогою як векторного, так і комплексного представлення обумовлена їх математичною сумісністю. Комплексні величини по суті є двовимірними векторами у комплексній площині.

Використання поняття механічного реактансу/імпедансу для виявлення резонансних умов вібраційного формування бетонних сумішей у гармонічних полях впливу.

Як було вказано вище, повний механічний опір або механічний імпеданс (impedance) бетонної суміші, яка знаходиться у вібраційному гармонічному полі впливу (де відбувається процес її формування у щільну структуру), визначається через інертний, пружний реактанси і залежить від діючих у суміші сил опору (наприклад, в’язкого опору за І.Ньютоном):  $z = \sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2}$ , де власне механічний реактансе (reactance):  $x = m\omega - k/\omega$ . При цьому сила, діюча ззовні на бетонну суміш, має величину  $F = Vz$ , де  $V$  – швидкість руху суміші. За  $V = const$  мінімальним буде значення сили  $F$ , якщо  $z \rightarrow 0$ . Мінімальним значенням  $z$  буде на певній (резонансній) частоті системи ( $\omega_{res}$ ), коли врівноважуються між собою пружний та інерційний реактанси, а механічний реактанс при цьому дорівнює нулю:

$$x = 0 \Rightarrow (m\omega - k/\omega) = 0 \Rightarrow \omega = \omega_{res} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow z = z_{min} = r.$$

Отже, якщо частота зовнішнього силового гармонічного впливу на бетонну суміш, яка формується у вібраційному полі, співпадає з  $\omega_{res}$  даної суміші (яка, у свою чергу, визначається механічними властивостями та характеристиками цієї суміші, а саме: масою та коефіцієнтом пружності), тоді силовий вплив стає мінімальним за величиною  $F \rightarrow \min$  (при цьому, звичайно,  $V = const$ ). Цю обставину доцільно використовувати для ефективного та енергоощадного режиму формування/ущільнення різноманітних будівельних/бетонних сумішей.

### **Висновки.**

1. При механічних гармонічних коливаннях приводів вантажопідйомних, транспортуючих та віброформуєчих бетонні/будівельні суміші машин і механізмів розвивається теплова потужність (додатнього знаку) й знакозмінні реактивні потужності, котрі характеризують оборотність кінетичної та потенціальної енергій. Повна механічна потужність задовольняє формулі Піфагора.

2. Представлення про механічні реактивну, активну та повну потужності є узагальненням відповідних понять про потужності на теренах електротехніки, що є проявом електромеханічного дуалізму [22, 23].

3. В перспективі можливим є представлення розглянутих механічних величин з використанням алгебри кватерніонів над полем дійсних чисел [24].

4. Отримані у роботі результати можуть бути у подальшому використані, зокрема, для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку основних параметрів вібраційних машин, призначених для формування й ущільнення бетонних/будівельних сумішей, які працюють у високоефективних та енергоощадних режимах обробки вказаних будівельних матеріалів, а також при реальній експлуатації наявного (існуючого) технологічного обладнання для подібних цілей.

### **СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Бурьян Ю.А., Балакин П.Д., Сорокин В.Н. К вопросу о стабилизации амплитуды колебаний механической системы. Омский научный вестник. 2014. №2 (130). С. 38-44.
2. Загривный Э.А., Иваник В.В. Стабилизация амплитуды колебаний авторезонансного асинхронного электропривода возвратно-вращательного движения динамически уравновешенного бурового снаряда на грузонесущем кабеле. Записки Горного института. 2011. Т.189. С. 91-94.

3. Шестаков В.М., Белокузов Е.В., Епишкин А.Е. Синтез законов управления режимами работы автоматизированных вибрационных установок. *Электричество*. 2013. №11. С. 31-36.
4. Попов И.П. Теория мультиинертного осциллятора. *Проблемы машиностроения и автоматизации*. 2020. №3. С. 88-91.
5. Бурьян Ю.А., Сорокин В.Н., Капелюховский А.А. Система управления интенсивностью излучения упругих волн скважинным генератором. *Омский научный вестник*. 2011. №1 (97). С. 75-79.
6. Пат.2624829 Рос. Федерация. Способ управления характеристикой вибрационного поля и устройство для его осуществления /С.В. Елисеев, А.В. Елисеев, А.П. Хоменко и др. №2015156775. Оpubл.07.07.2017, Бюл.№19. 22 с.
7. Пат.2624757 Рос. Федерация. Способ управления структурой вибрационного поля вибрационной технологической машины на основе использования эффектов динамического гашения и устройство для его осуществления / С.В. Елисеев, А.В. Елисеев, Е.В. Каимов и др. №2016102236. Оpubл. 06.07.2017, Бюл.№19. 15 с.
8. Управление мехатронными вибрационными установками / Б.Р. Андриевский, И.И. Блехман, Ю.А. Борцов и др. СПб: Наука, 2001. 278 с.
9. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи). Иркутск: изд-во ИрГУПС, 2018. 692 с.
10. Елисеев С.В., Артюнин А.И. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем. Новосибирск: Наука, 2016. 459 с.
11. Васьков М.В., Тульский В.Н. Исследование вопроса компенсации реактивной мощности в электрических сетях «РОССЕТИ ЛЕНЭНЕРГО». *Электроэнергия. Передача и распределение*. 2019. №53 (14). С. 28-33.
12. К вопросу повышения эффективности энергосистем и обоснования компенсации реактивной мощности в электрических сетях / М.М. Султанов, А.В. Стрижиченко, И.А. Болдырев и др. *Надежность и безопасность энергетики*. 2020. Т.13. №4. С. 267-272.
13. Романовский В.В., Бежик А.С. Повышение качества электрической энергии в судовых электроэнергетических системах. *Вестник гос. ун-та морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова*. 2021. Т.13. №1. С. 87-101.
14. Едемский С.Н., Пушкаренко И.И., Тригуб О.В. Использование устройства компенсации реактивной мощности СТАТКОМ в электроэнергетической системе. *Энергобезопасность и энергосбережение*. 2013. №3. С. 27-30.
15. Догадкин Д., Скупов Д., Губарина О. Компенсация реактивной мощности в распределительной сети ПАО «МОЭСК». *Электроэнергия. Передача и распределение*. 2016. №6 (39). С. 60-62.
16. Павлов В.О. Автокомпенсация реактивной мощности в электрических сетях. *Журнал Сибирского федерального ун-та. Техника и технологии*. 2021. №14 (6). С. 684-688.

17. Павлов В.Д. Перетоки реактивной мощности между фазами. Современная техника и технологии: проблемы, состояние и перспективы: Материалы XI Всерос. научно-практ. конф. Рубцовск, 2021. С. 271-274.
18. Попов И.П. Применение символического (комплексного) метода для расчета сложных механических систем при гармонических воздействиях. Прикладная физика и математика. 2019. №4. С. 14-24.
19. Павлов В.Д. Математические модели резонансных и антирезонансных процессов. Вестник Урал.гос.ун-та путей сообщ. 2021. №1 (49). С. 17-27.
20. Попов И.П. Инертные реактансы вибрационных машин. Вестник Магнитогорск.гос.техн.ун-та им. Г.И.Носова. 2019. Т.17. №4. С. 52-55.
21. Попов И.П. “Ортогональные” мощности при механических колебаниях. Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2019. №6 (338). С. 12-15.
22. Попов И.П. Зависимость реактивного сопротивления пьезоэлектрического преобразователя от механических параметров его нагрузки. Научно-техн. вестник информац. технологий, механики и оптики. 2013. №5 (87). С. 94-98.
23. Павлов В.Д. Энергетика излучения электрического заряда и ее следствия. Известия Уфимского научн. центра РАН. 2021. №4. С. 5-8.
24. Павлов В.Д. Механическая мощность при гармонических воздействиях. Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2022. №1 (73). С. 30-38.

Ph.D., Professor **ISA Chovnyuk Yurii**,  
Ph.D., Associate Professor **Kravchyuk Volodymyr**,  
Associate Professor **Cherednichenko Petro**,  
Ph.D., Associate Professor **Ostapushchenko Olga**  
Kyiv National University of Construction and Architecture

## **ANALYSIS OF MECHANICAL POWER TRANSFORMATION PROCESSES DURING HARMONIC OSCILLATIONS OF DRIVES IN LOAD-LIFTING, TRANSPORTING AND VIBROFORMING CONCRETE MIXTURE MACHINES AND MECHANISMS**

The purpose of the study is to detail the types of mechanical power during harmonic oscillations of drives in load-lifting, transporting and vibroforming concrete mixture machines and mechanisms. Due to the irreversibility of thermal energy, its derivative will take only positive values. However, derivatives can be taken from both potential and kinetic energy. But the most interesting case is the case of harmonic oscillations in the specified machines and mechanisms drives, for which the derivatives (instantaneous power) are sign-changing functions, that fundamentally distinguishes them from thermal power. The analogue of kinetic energy in electric engineering is

magnetic field energy in inductor coil, potential energy analogue is capacitor's electric field energy, and mechanical thermal energy is replaced by thermal energy, which is dissipated by the resistor. It is shown in this study that not only thermal power (with a positive sign) develops during load-lifting, transporting and vibroforming concrete mixture machines and mechanisms drivers mechanical oscillations, but also sign-changing reactive powers, which characterize the kinetic and potential energies inverse. Here, the active power is understood as the average value of the instantaneous power for half a period, and under reactive – amplitude value. The full mechanic power of machines and mechanisms drives, on the one hand, is described by the Pythagorean formula, and from the other – is equal to the product of the harmonic quantities effective values. A feature of the complex representation is that when calculating the full power, one of the vectors that are multiplied must be conjugate. The representation about mechanical reactive, active and full power is a generalization of the corresponding concepts from electrical engineering, which is a manifestation of electro-mechanical dualism. Since in most machines and mechanisms the drives are mainly electromechanical, mechanical reactive power transforms into electrical reactive power of the network, thereby worsening the quality of electricity. Therefore, consideration of mechanical reactive power is of great importance.

Key words: mechanical power; kinetic energy; potential energy; complex representation; vector representation; resonances; drives; load-lifting; transporting; vibroforming machines; mechanical power transformation.

## REFERENCES

1. Burian Yu.A., Balakyn P.D., Sorokyn V.N. К вопросу о стабилизации амплитуды колебаний механической системы. Омский научный вестник. 2014. №2 (130). S.38-44. {in Russian}
2. Захрыныи Э.А., Явнык V.V. Стабилизация амплитуды колебаний автрезонансного асинхронного электропривода возвратно-вращательного движения динамически уравновешенного бурового снаряда на грузонесущем кабеле. Записки Горного института. 2011. Т.189. S.91-94. {in Russian}
3. Shestakov V.M., Belokuzov E.V., Ерышкын А.Е. Синтез законов управления режимом работы автоматизированных вибраторных установок. Электричество. 2013. №11. S.31-36. {in Russian}
4. Popov Y.P. Теория мультиинертного оцсиллятора. Проблемы машиностроения и автоматизации. 2020. №3. S.88-91. {in Russian}
5. Burian Yu.A., Sorokyn V.N., Kapeliukhovskiy A.A. Система управления интенсивности излучения упругих волн скважинным генератором. Омский научный вестник. 2011. №1 (97). S.75-79. {in Russian}

6. Pat.2624829 Ros.Federatsiya. Sposob upravleniya kharakterystykoj vybratsyonnoho polia y ustroistvo dlia eho osushchestvleniya /S.V. Elyseev, A.V. Elyseev, A.P. Khomenko y dr. №2015156775. Opubl.07.07.2017, Biul. №19. 22 s. {in Russian}

7. Pat.2624757 Ros. Federatsiya. Sposob upravleniya strukturoi vybratsyonnoho polia vybratsyonnoi tekhnolohycheskoj mashyny na osnove yspolzovaniya effektov dynamycheskoho hasheniya y ustroistvo dlia eho osushchestvleniya / S.V. Elyseev, A.V. Elyseev, E.V. Kaymov y dr. №2016102236. Opubl. 06.07.2017, Biul. №19. 15 s. {in Russian}

8. Upravlenye mekhatronnyy vybratsyonnyy ustanovkamy / B.R. Andryevskiy, Y.Y. Blekhman, Yu.A. Bortsov y dr. SPb: Nauka, 2001. 278 s. {in Russian}

9. Elyseev S.V. Prykladnoi systemnyi analiz y strukturnoe matematycheskoe modelirovaniye (dynamyka transportnykh y tekhnolohycheskykh mashyn: svyaznost dvyzheniy, vybratsyonnye vzaymodeistviya, rychnazhnyye svyazy). Yrkutsk: yzd-vo YrHUPS, 2018. 692 s. {in Russian}

10. Elyseev S.V., Artiunyn A.Y. Prykladnaia teoryia kolebaniy v zadachakh dynamiky lyneinykh mekhanicheskykh system. Novosybyrsk: Nauka, 2016. 459 s. {in Russian}

11. Vaskov M.V., Tulskiy V.N. Yssledovaniye voprosa kompensatsyy reaktivnoy moshchnosti v elektrycheskykh setiakh «ROSSETY LENENERHO». Elektroenerhiya. Peredacha y raspredeleniye. 2019. №53 (14). S. 28-33. {in Russian}

12. K voprosu povysheniya effektivnosti enerhosystem y obosnovaniya kompensatsyy reaktivnoy moshchnosti v elektrycheskykh setiakh / M.M. Sultanov, A.V. Stryzhychenko, Y.A. Boldyrev y dr. Nadezhnost y bezopasnost enerhetyky. 2020. T.13. №4. S.267-272. {in Russian}

13. Romanovskiy V.V., Bezhyk A.S. Povysheniye kachestva elektrycheskoj enerhiyy v sudovykh elektroenerhetycheskykh systemakh. Vestnyk hos. un-ta morskoho y rechnoho flota ym. admirala S.O. Makarova. 2021. T.13. №1. S.87-101. {in Russian}

14. Edemskiy S.N., Pushkarenko Y.Y., Tryhub O.V. Yspolzovaniye ustroistva kompensatsyy reaktivnoy moshchnosti STATKOM v elektroenerhetycheskoj systeme. Enerhobezopasnost y enerhosberezeniye. 2013. №3. S.27-30. {in Russian}

15. Dohadkyn D., Skupov D., Hubaryna O. Kompensatsiya reaktivnoy moshchnosti v raspredelytelnoi sety PAO «MOËSK». Elektroenerhiya. Peredacha y raspredeleniye. 2016. №6 (39). S.60-62. {in Russian}

16. Pavlov V.O. Avtokompensatsiya reaktivnoy moshchnosti v elektrycheskykh setiakh. Zhurnal Sybyrskoho federalnogo unyversyteta. Tekhnika y tekhnolohyy. 2021. №14 (6). S.684-688. {in Russian}



17. Pavlov V.D. Peretoky reaktyvnoi moshchnosti mezhdru fazamy. Sovremennaiia tekhnika y tekhnolohyy: problemy, sostoianye y perspektivy: Materyaly XI Vseros. nauchn.-prakt.konf. Rubtsovsk, 2021. S. 271-274. {in Russian}
18. Popov Y.P. Prymeneniye symvolicheskoho (kompleksnoho) metoda dlia rascheta slozhnykh mekhanicheskyykh system pry harmonicheskyykh vozdeistviyakh. Prikladnaia fizyka y matematika. 2019. №4. S.14-24. {in Russian}
19. Pavlov V.D. Matematicheskiye modely rezonansnykh y antyrezonansnykh protsessov. Vestnyk Ural.hos.un-ta putei soobshch. 2021. №1 (49). S. 17-27. {in Russian}
20. Popov Y.P. Ynertnyye reaktansy vybratsyonnykh mashyn. Vestnyk Mahnytohorsk.hos.tekhn.un-ta ym. H.Y. Nosova. 2019. T.17. №4. S.52-55. {in Russian}
21. Popov Y.P. "Ortohonalnyye" moshchnosty pry mekhanicheskyykh kolebaniyakh. Fundamentalnyye y prikladnyye problemy tekhnika y tekhnolohyy. 2019. №6 (338). S. 12-15. {in Russian}
22. Popov Y.P. Zavysymost reaktyvnoho soprotivleniya pezoelektrycheskoho preobrazovatel'ia ot mekhanicheskyykh parametrov ego nahruzky. Nauchn.-tekhn. vestnyk ynformats. tekhnolohyi, mekhanika y optyky. 2013. №5 (87). S.94-98. {in Russian}
23. Pavlov V.D. Enerhetyka yzlucheniya elektrycheskoho zariada y ee sledstviya. Yzvestiya Ufymskoho nauchn. tsentra RAN. 2021. №4. S. 5-8. {in Russian}
24. Pavlov V.D. Mekhanicheskaiia moshchnost pry harmonicheskyykh vozdeistviyakh. Sovremennyye tekhnolohyy. Systemnyi analiz. Modelirovaniye. 2022. №1 (73). S. 30-38. {in Russian}